Fonctions L en géométrie rigide I: F-modules convergents ou surconvergents et conjecture de Dwork

Jean-Yves Etesse

Fonctions L en géométrie rigide I : F-modules convergents ou surconvergents et conjecture de Dwork

Jean-Yves ETESSE [1]

Sommaire

1. (CNRS - IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu - 35042 RENNES Cedex France)
E-mail : Jean-Yves.Etesse@univ-rennes1.fr

Résumé

Cet article est le premier d'une série de trois articles consacrés aux fonctions L. Dans celui-ci nous définissons les fonctions L des F-modules convergents ou surconvergents à l'aide des relèvements de Teichmüller et nous établissons la méromorphie des fonctions L des F-modules convergents dans le disque unité fermé. Wan a établi la conjecture de Dwork dans une série de trois articles [W 2, W 3, W 4] ; par un théorème d'isogénie de Katz, sa preuve se ramène au cas ordinaire : nous prouvons ici, sur deux exemples explicites liés aux familles de courbes elliptiques, que la filtration par les pentes d'un F-module ordinaire surconvergent ne se remonte pas en une filtration surconvergente. Au passage nous montrons que le sous-F-isocristal unité dans la cohomologie de de Rham de la famille de Legendre des courbes elliptiques ordinaires n'est pas surconvergent au sens de Berthelot. Dans le deuxième article nous donnerons une définition des fonctions L des F-(iso)cristaux par voie cohomologique et nous montrerons comment elle rejoint celle donnée ici : elle redonne celle utilisée en cohomologie cristalline par Katz [K 1] ou [Et 1], ou celle en cohomologie rigide de [E-LS 1], ou celle utilisée par Wan [W 2] ; le but est alors de donner une preuve de la conjecture de Katz sur les zéros et pôles unités p-adiques de ces fonctions L en utilisant la cohomologie rigide. Dans le troisième article nous explicitons ces résultats pour les schémas abéliens ordinaires .

Abstract

This article is the first one of a series of three articles devoted to L-functions. In this one we define the L-functions of convergent or overconvergent F-modules with the help of Teichmüller liftings and we establish the meromorphy of the L-functions of convergent F-modules in the closed unit disk. Wan has established Dwork conjecture in a series of three articles [W 2, W 3, W 4] ; owing to an isogeny theorem of Katz, his proof reduces to the ordinary case : here we prove, on two explicit examples related to families of ellipitic curves, that the slope filtration on an ordinary overconvergent F-module doesn't lift to an overconvergent filtration. As a by-product we show that the unit-root sub-F-isocrystal of the de Rham cohomology of the Legendre family of ordinary elliptic curves is not overconvergent in Berthelot's sense. In the second article we'll give a definition of the L-functions of F-(iso)crystals by cohomological means and we'll show how it matches with the one given here : it gives back the one used in crystalline cohomology by Katz [K 1] or [Et 1], or the one used in rigid cohomology by [E-LS 1], or the

one used by Wan [W 2] ; the aim is then to give a proof of Katz conjecture on p-adic unit roots and poles of these L-functions using rigid cohomology. In the third article we give an explicit form of these results for ordinary abelian schemes.

2010 Mathematics Subject Classification : 11F85, 11G40, 11L, 11M38, 11S40, 14F30, 14G10, 14G15, 14G22.

Mots clés : algèbres de Monsky-Washnitzer, fonctions L, F- modules (sur)convergents, formule des traces, méromorphie p-adique.

Key words : Monsky-Washnitzer algebras, L functions, (over)convergent F-modules, trace formula, p-adic meromorphy.

0. Introduction

Notations : Sauf mention du contraire, on suppose dans cet article que k est un corps fini, $k = \mathbb{F}_q, q = p^a, \mathcal{V}$ est un anneau de valuation discrète complet, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et corps résiduel $k = \mathbb{F}_q$. On suppose le corps des fractions K de $\mathcal{V}$ de caractéristique 0, on fixe une uniformisante π et on note e l'indice de ramification. On relève la puissance q sur k en un automorphisme σ de $\mathcal{V}$ suivant la méthode de [Et 4, I 1.1] en supposant que $\sigma(\pi) = \pi$: on note encore σ son extension à K.

Cet article est le premier d'une série de trois articles consacrés à l'étude des fonctions L qui apparaissent en cohomologie rigide, par exemple comme facteurs dans la fonction zêta d'une variété X paramétrée par une autre variété S au-dessus du corps fini k. Les ≪coefficients≫ qui apparaissent alors sont les images directes par $f : X \to S$ du faisceau structural, et la question est de savoir si ces **images directes** sont adaptées à la cohomologie rigide, i.e. si ce sont des F-isocristaux surconvergents, question qui a été abordée dans [Et 7] et [Et 9] : lorsque c'est le cas, ces fonctions L sont méromorphes [E-LS 1], et même rationnelles grâce à Kedlaya [Ked 1]. L'un des buts de ces trois articles est de décomposer ces fonctions L, lorsqu'elles sont méromorphes, en produits de facteurs L_α de ≪pentes≫ α rationnelles différentes, liés aux **conjectures de Dwork et de Katz**, et de donner une **description explicite de ces facteurs** L_α en termes de fonctions L usuelles.

Plus précisément, soient S une k-variété (i.e. un k-schéma séparé de type fini) et $f : X \to S$ un morphisme de k-variétés. Si l'on désigne par $|X|$ l'ensemble des points fermés de X, la fonction zêta de X est définie par

$$Z(X,t) = \prod_{x \in |X|} det(1 - t^{\deg\, x})^{-1}, \text{où } \deg x = [k(x) : k] \ ,$$

et l'on sait par Grothendieck [G 2] que pour ℓ premier distinct de p cette expression est donnée par

$$Z(X,t) = \prod_i det(1 - t\ F | H^i_{\text{ét},c}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell))^{(-1)^{i+1}} \qquad (1) \ ,$$

où $X_{\overline{k}}$ est l'image inverse de X sur une clôture algébrique $\overline{k}$ de k, et les $H^i_{\text{ét},c}$ sont des $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels de dimension finie sur lesquels le Frobenius F agit.

On peut aussi fibrer la situation au-dessus de S :

$$Z(X,t) = \prod_{s\in|S|} Z(X_s, t^{\deg\, s}), \text{où } X_s = f^{-1}(s) \text{ et } \deg s = [k(s):k] \ ;$$

et l'on sait encore par Grothendieck [G 2] que l'on a les expressions

$$\begin{aligned} Z(X,t) &= \prod_{s\in|S|}\prod_i det(1 - t^{\deg\, s}\ F_s^{\deg\, s} | (R^i f_{\acute{e}t,c*}\mathbb{Q}_\ell)_{\overline{s}})^{(-1)^{i+1}} \\ &= \prod_i L(S,\mathcal{F}^i,t)^{(-1)^i} \text{ où } \mathcal{F}^i = R^i f_{\acute{e}t,c*}\mathbb{Q}_\ell \\ &= \prod_{i,j} det(1 - t\ F | H^j_{\text{ét},c}(S_{\overline{k}},\mathcal{F}^i))^{(-1)^{i+j+1}} \qquad (2)\ , \end{aligned}$$

où $\overline{s}$ est un point géométrique au-dessus de s, $S_{\overline{k}}$ est l'image inverse de S sur une clôture algébrique $\overline{k}$ de k, et les $H^i_{\text{ét},c}$ sont des $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels de dimension finie sur lesquels le Frobenius F agit.

On obtient ainsi par voie ℓ-adique la rationalité de la fonction zêta (formule (1)) de même que celle de chacune des fonctions L qui apparaissent dans la fibration de X au-dessus de S (formule (2)).

La première preuve p-adique de rationalité de la fonction zêta avait été obtenue antérieurement par Dwork [Dw 1], mais par une voie «précohomologique». Pour avoir une preuve cohomologique de l'analogue p-adique de la formule (1) il faudra attendre les travaux de Monsky et Washnitzer [M-W] pour une variété X affine et lisse sur k (la cohomologie de Monsky-Washnitzer remplace la cohomologie étale ℓ-adique dans la formule (1)) ou la cohomologie cristalline de Berthelot pour une variété X propre et lisse sur k (la cohomologie cristalline à coefficients dans le faisceau structural remplace la cohomologie ℓ-adique dans la formule (1)). Pour une variété X quelconque la cohomologie rigide de Berthelot est utilisée pour établir la rationalité de la fonction zêta dans le cas général [E-LS 1].

Si l'on veut un **analogue p-adique de la formule (2)**, on peut dans un premier temps envisager le cas où S est propre et lisse sur k et $\mathcal{F}^i$ correspond à un F-cristal localement libre de type fini : c'est la situation étudiée dans [Et 1]. Mais si l'on souhaite considérer une variété S quelconque sur k il faut remplacer la cohomologie ℓ-adique à supports compacts de (2) par la cohomologie rigide à supports compacts de S, avec des coefficients adaptés à la cohomologie rigide, à savoir des F-isocristaux surconvergents. On est donc amené à introduire l'analogue «rigide» des $\mathcal{F}^i$, autrement dit les **images**

directes du faisceau structural

$$E^i := R^i f_{rig*}(\mathcal{O}_{X/K}) \ ,$$

où K désigne le corps des fractions de l'anneau $W(k)$ des vecteurs de Witt de k, et voir **dans quelles conditions on obtient leur surconvergence** : cette surconvergence est vraie lorsque X/S est un schéma abélien [Et 4] ; l'objet de [Et 7], [Et 9] est l'obtention d'autres conditions de surconvergence pour ces images directes. Le cas d'un f propre et lisse quelconque reste ouvert malgré des résultats de Shiho [Shi 2], [Shi 3], et constitue une conjecture de Berthelot. Lorsque ces conditions de surconvergence sont satisfaites on obtient alors grâce à [E-LS 1] la méromorphie de $L(S, E^i, t)$ et même sa rationalité en prenant en compte la finitude de la cohomologie rigide à coefficients prouvée par Kedlaya [Ked], ce qui fournit l'analogue p-adique de (2).

Une fois connue la rationalité (ou la méromorphie) de la fonction zêta ou des fonctions L précédentes, on se pose la question de connaître la partie constituée des zéros et pôles unités p-adiques de ces fonctions : c'est l'objet des **conjectures de Dwork et de Katz.**

Reprenons l'exemple de la situation relative $f : \ X \to S$ au-dessus de k. La fonction zêta-unité de X/S est définie par Dwork et Sperber dans [Dw-S] par

$$Z_u(X/S, t) = \prod_{s \in |S|} Z_u(X_s, t^{\deg\ s}) \ ,$$

où $Z_u(X_s, T)$ est obtenue à partir de la fonction zêta de X_s, $Z(X_s, T)$, en ne conservant dans cette fraction rationnelle que les facteurs $(1 - aT)^{+/-}$ avec $|a|_p = 1$.

Initialement **la conjecture de Dwork** consistait à se demander si $Z_u(X/S, t)$ était p-adiquement méromorphe [Dw 3] [Dw 5]. Or il a été établi dans [E-LS 2] que

$$Z_u(X/S, t) = L(S, \mathbb{R}f_!\mathbb{Q}_p) := \prod_i L(S, R^i f_{ét,c*}\mathbb{Q}_p)^{(-1)^i}$$

où les $\mathcal{G}^i := R^i f_{ét,c*}\mathbb{Q}_p$ sont des faisceaux p-adiques constructibles. Les $\mathcal{G}^i$ peuvent être associés à des F-isocristaux convergents, mais pas surconvergents en général comme le prouve un exemple de Crew [C] : par conséquent on ne peut utiliser la cohomologie rigide et espérer obtenir la rationalité de ces fonctions L via [E-LS 1] et donc de $Z_u(X/S, t)$, sauf si S était propre sur k [E-LS 1] ou si S était propre et lisse sur k [Et 1]. Dans le cas général d'une variété S quelconque Wan a même démontré [W 1] que de telles fonctions L (associées à des F-isocristaux convergents) ne sont pas nécessairement p-adiquement méromorphes. Intermédiaire en un certain sens entre F-isocristaux convergents et surconvergents se trouve la notion de F-modules surconvergents [cf §3] : on oublie la connexion et sa surconvergence pour ne garder que la surconvergence du Frobenius ; pour de tels F-modules surconvergents $\mathcal{H}$ sur S affine et lisse sur k, Wan a alors défini les fonctions $L(S, \mathcal{H}, t)$ et prouvé leur méromorphie (cf [W 1], [W 2], [Dw-S]). De plus Wan définit dans ce nouveau contexte [W 2] la partie $L_\alpha(S, \mathcal{H}, t)$ de pente $\alpha \in \mathbb{Q}$ de $L(S, \mathcal{H}, t)$ et la nouvelle formulation de la conjecture de Dwork consiste à dire que $L_\alpha(S, \mathcal{H}, t)$ est p-adiquement méromorphe : grâce à la surconvergence du Frobenius, Wan prouve alors la méromorphie de L_α ([W 3], [W 4]).

Ce **premier article** est consacré au cas d'un S affine et lisse. Nous commençons au §1 par une étude détaillée des relèvements de Teichmüller : celle-ci nous servira d'une part à relier les fonctions L d'un F-module sur S au cas de l'espace affine et d'autre part à établir ultérieurement le lien avec les fonctions L de F-isocristaux. Après avoir posé au §2 la définition de la fonction $L(S, \mathcal{H}, t)$ d'un F-module sur S, nous la relions au §3 au cas de l'espace affine. Au §4, après un rappel sur la formule des traces de Monsky, nous prouvons que la fonction L d'un F-module convergent est méromorphe dans le disque unité fermé. Au §5 nous montrons comment le théorème d'isogénie de Katz ramène la preuve de Wan au cas ordinaire : c'est dans ce contexte que nous prouvons, sur deux exemples explicites liés aux familles de courbes elliptiques ordinaires, que la filtration par les pentes d'un F-module ordinaire surconvergent ne se remonte pas en une filtration surconvergente. Au passage nous montrons que le sous-F-isocristal unité dans la cohomologie de de Rham de la famille de Legendre des courbes elliptiques ordinaires n'est pas surconvergent au sens de Berthelot.

Le **deuxième article** [Et 10] est consacré aux fonctions L des F-(iso)cristaux : nous globalisons les définitions et résultats précédents au cas de variétés non nécessairement affines avec pour coefficients des F-isocristaux Dwork-surconvergents et nous abordons la **conjecture de Dwork** dans ce contexte, ainsi que la **conjecture de Katz** relative aux zéros et pôles unités p-adiques de la fonction L d'un F-cristal unité.

En faisant une hypothèse supplémentaire sur f dans le **troisième article** [Et 11] , à savoir si X/S constitue un schéma abélien ordinaire, **nous explicitons dans la fraction rationnelle** $L(S, R^i f_{rig*}(\mathcal{O}_{X/K}))$ (c'est une fraction rationnelle grâce à la surconvergence des images directes $R^i f_{rig*}(\mathcal{O}_{X/K}$ [Et 4]) **la partie** L_α **de pente** $\alpha \in \mathbb{Q}$ **comme une fonction** L **usuelle** d'un certain F-cristal localement libre de type fini associé au cristal de Dieudonné du schéma abélien : ceci nécessite au préalable une caractérisation détaillée des schémas abéliens ordinaires en termes du cristal de Dieudonné du groupe p-divisible associé au schéma abélien. Si S est propre sur k il résulte alors de [E-LS 1] (ou de [Et 1] si S est propre et lisse sur k) que ces fonctions L_α sont en fait rationnelles.

1. Relèvements de Teichmüller

Dans ce §1 on supposera simplement que k est un corps parfait de caractéristique $p > 0$. Soit $X = \mathrm{Spec}\ A_0$ un k-schéma lisse. Pour $x \in\ |X| = \{\text{points fermés de } X\}$, soit $i_x = Spec\ k(x) \hookrightarrow X$ l'immersion fermée canonique : $k(x) = A_0/\mathfrak{m}_x$ est une extension finie étale de k de degré deg $x = [k(x) : k]$. Notons $W = W(k)$ (resp. $W(x) = W(k(x))$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k (resp. $k(x)$),

$$\mathcal{V}(x) = W(x) \otimes_W \mathcal{V} \simeq W(x)[\pi] \ ,$$

$K_0 = \mathrm{Frac}\ W,\ K_0(x) = \mathrm{Frac}(W(x)), K(x) = \mathrm{Frac}(\mathcal{V}(x))$, σ_x la puissance p^a sur $k(x)$, $\sigma_{W(x)} = W(\sigma_x)$ le relèvement canonique de σ_x à $W(x)$, $\sigma_{\mathcal{V}(x)} = \sigma_{W(x)} \otimes_W \mathcal{V}$ et $\sigma_{K(x)}$ (resp. $\sigma_{K_0(x)}$) son extension naturelle à $K(x)$ (resp. $K_0(x)$) définie par $\sigma_{K(x)}(u/v) = \sigma_{\mathcal{V}(x)}(u)/\sigma_{\mathcal{V}(x)}(v)$ (resp. $\sigma_{K_0(x)}(u/v) = \sigma_{W(x)}(u)/\sigma_{W(x)}v)$). Le morphisme $\sigma_{K(x)}$ coïncide, d'après [Et 4, I.1.1] et [B-M, (1.2.7) (ii)], avec le morphisme $\sigma' : K' \to K'$ (au-dessus de $\sigma : K \to K$) de [Et 4, I.1.1] pour $k' = k(x)$.

Soit A une $\mathcal{V}$-algèbre lisse relevant A_0 et fixons une présentation $A = \mathcal{V}[t_1, ..., t_d]/(f_1, ..., f_\epsilon)$. On désigne par $\hat{A}$ ((resp. $A^\dagger$) le séparé complété (resp. le complété faible) $\mathfrak{m}$-adique de A : on a des isomorphismes

$$\begin{aligned} \hat{A} &\simeq \mathcal{V}\{t_1, ..., t_d\}/(f_1, ..., f_\epsilon) \ , \\ A^\dagger &\simeq \mathcal{V}[t_1, ..., t_d]^\dagger/(f_1, ..., f_\epsilon). \end{aligned}$$

Soient P le complété formel de la fermeture projective de $\mathcal{X} = Spec\ A$ dans $\mathbb{P}^d_{\mathcal{V}}$, $P_1 = Spf(\mathcal{V}(x))$, $X_1 = Spec(k(x))$. D'après [Et 4, (1.2.1)] il existe un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} A^\dagger \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{V}(x) =: A^\dagger(x) \arrow[r, "F_{A^\dagger(x)}"] & A^\dagger(x) \\ A^\dagger \arrow[u] \arrow[r, "F_{A^\dagger}"] & A^\dagger \arrow[u] \end{tikzcd}$$

au-dessus du carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}(x) & \xrightarrow{\sigma_{\mathcal{V}(x)}} & \mathcal{V}(x) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{V} & \xrightarrow{\sigma_{\mathcal{V}}} & \mathcal{V} \end{array} \quad ,$$

où $F_{A^\dagger}$ est un relèvement à $A^\dagger$ du Frobenius (puissance q) de A_0 ; d'où un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{V}(x) & \longrightarrow & A^\dagger(x) & \longrightarrow & \hat{A}(x) := \hat{A} \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{V}(x) \\ {\scriptstyle \sigma_{\mathcal{V}(x)}}\downarrow & & {\scriptstyle F_{A^\dagger(x)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_{\hat{A}(x)}} \\ \mathcal{V}(x) & \longrightarrow & A^\dagger(x) & \longrightarrow & \hat{A}(x) \end{array} \quad .$$

Par conséquent le morphisme $s : A_0 \to k(x)$ se relève de manière unique d'après Katz [K 1] en un morphisme

$$\tau(x) : \hat{A}(x) \to \mathcal{V}(x)$$

tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \hat{A}(x) & \xrightarrow{\tau(x)} & \mathcal{V}(x) \\ {\scriptstyle F_{\hat{A}(x)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_{\mathcal{V}(x)}} \\ \hat{A}(x) & \xrightarrow{\tau(x)} & \mathcal{V}(x) \end{array}$$

commute : $\tau(x)$ est appelé le **relèvement de Teichmüller de s (ou de x) relativement à $F_{\hat{A}(x)}$**. Les morphismes composés

$$\hat{\tau}(x) : \hat{A} \hookrightarrow \hat{A}(x) \xrightarrow{\tau(x)} \mathcal{V}(x) \ ,$$

$$\tau^\dagger(x) : A^\dagger \hookrightarrow \hat{A} \xrightarrow{\hat{\tau}(x)} \mathcal{V}(x)$$

sont appelés respectivement **relèvement de Teichmüller de s (ou de x) relativement à $F_{\hat{A}}$ ou $F_{A^\dagger}$: $\hat{\tau}(x)$(resp. $\tau^\dagger(x)$) est un point de Teichmüller de $\hat{A}$ (resp. de $A^\dagger$) relativement à $F_{\hat{A}}$ (resp. $F_{A^\dagger}$).**

Pour $n \in \mathbb{N}$ les applications $\hat{\tau}(x)$ et $\tau^\dagger(x)$ donnent, en quotientant par π^{n+1}, une application

$$\tau_n(x) : A_n = \hat{A}/\pi^{n+1}\hat{A} = A^\dagger/\pi^{n+1}/A^\dagger \to \mathcal{V}_n(x) = \mathcal{V}(x)/\pi^{n+1}\mathcal{V}(x) \ .$$

Au lieu de considérer x comme point fermé de X on peut aussi le considérer comme point fermé de $\mathbb{A}^d_k = Spec\ k[\underline{t}]$ où $\underline{t} = (t_1, ..., t_d)$: on va voir qu'alors $\tau^\dagger(x)$ s'étend en un relèvement de Teichmüller de x à $\mathcal{V}[\underline{t}]^\dagger$. Notons $R = \mathcal{V}[\underline{t}]$, $R^\dagger$ (resp. $\hat{R}$) son complété faible (resp. son séparé complété) et I le noyau de la surjection canonique

$$\mu : R^\dagger \twoheadrightarrow A^\dagger \ .$$

On peut relever (de manière non unique) le Frobenius $F_{A^\dagger}$ de $A^\dagger$ en un endomorphisme $F_{R^\dagger}$ de $R^\dagger$ de la façon suivante : il suffit de choisir des éléments $F_{R^\dagger}(t_i)$ de $R^\dagger$ tels que

$$F_{R^\dagger}(t_i) \equiv t_i^q (\mathrm{mod}\ \pi),\ F_{R^\dagger}(t_i) \in \mu^{-1}(F_{A^\dagger}(\mu(t_i)))\ ,$$

choix qu'il est possible de faire car $F_{A^\dagger}(\mu(t_i)) \equiv t_i^q$ (mod (π, I)). On étend ce choix d'éléments $F_{A^\dagger}(\mu(t_i))$ en un endomorphisme $F_{R^\dagger}$ de la $\mathcal{V}$-algèbre $R^\dagger$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} R^\dagger \arrow[r, two heads, "\mu"] \arrow[d, "F_{R^\dagger}"'] & A^\dagger \arrow[d, "F_{A^\dagger}"] \\ R^\dagger \arrow[r, two heads, "\mu"] & A^\dagger \end{tikzcd}$$

commute ; en particulier on a $F_{R^\dagger}(I) \subset I$.
Les morphismes $F_{R^\dagger}$ et $F_{A^\dagger}$ sont finis et fidèlements plats puisque leur réduction mod π le sont [Et 3, théo 17] ; par changement de base de $R^\dagger$ à $\hat{R}$ appliqué au diagramme précédent on en déduit le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \hat{R} \arrow[r, two heads, "\hat{\mu}"] \arrow[d, "F_{\hat{R}}"'] & \hat{A} \arrow[d, "F_{\hat{A}}"] \\ \hat{R} \arrow[r, two heads, "\hat{\mu}"] & \hat{A} \end{tikzcd}$$

Par conséquent le morphisme composé

$$k[\underline{t}] \twoheadrightarrow A_0 \xrightarrow{s} k(x)$$

correspondant au point x de $\mathbb{A}^d_k$ se relève de manière unique [K 1] en un morphisme

$$\hat{\tau}_R(x) : \hat{R} \hookrightarrow \hat{A} \xrightarrow{\hat{\tau}(x)} \mathcal{V}(x)$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \hat{R} \arrow[r, "\hat{\tau}_R(x)"] \arrow[d, "F_{\hat{R}}"'] & \mathcal{V}(x) \arrow[d, "\sigma_{\mathcal{V}(x)}"] \\ \hat{R} \arrow[r, "\hat{\tau}_R(x)"] & \mathcal{V}(x) \end{tikzcd}$$

commute : $\hat{\tau}_R(x)$ est appelé le **relèvement de Teichmüller de x relativement à $F_{\hat{R}}$**. Le morphisme composé

$$\tau_R^\dagger(x) : R^\dagger \hookrightarrow \hat{R} \xrightarrow{\hat{\tau}_R(x)} \mathcal{V}(x)$$

est appelé le **relèvement de Teichmüller de x relativement à $F_{R^\dagger}$**. Par l'unicité des relèvements de Teichmüller prouvée par Katz [K 1], il y a ainsi **bijection entre les points de Teichmüller de $A^\dagger$ relativement à $F_{A^\dagger}$ et les points de Teichmüller de $R^\dagger$ relativement à $F_{R^\dagger}$ qui se réduisent mod π en des points de X.**

De même, pour toute extension finie $k \hookrightarrow k'$, il y a une bijection entre les trois ensembles suivants :

(i) l'ensemble des points $x \in X(k')$= {points de X à valeur dans k'},

(ii) l'ensemble des points de Teichmüller de $A^\dagger$ relativement à $F_{A^\dagger}$ à valeur dans $\mathcal{V}(k') :=\ W(k') \otimes_W \mathcal{V}$,

(iii) l'ensemble des points de Teichmüller de $R^\dagger$ relativement à $F_{R^\dagger}$ à valeur dans $\mathcal{V}(k') :=\ W(k') \otimes_W \mathcal{V}$ qui se réduisent mod π en des points de X à valeur dans k'.

Les morphismes $\hat{\tau}(x)$ et $\tau^\dagger(x)$ (resp. $\hat{\tau}_R(x)$ et $\tau_R^\dagger(x)$) sont surjectifs car la réduction de $\tau^\dagger(x)$ mod π (resp. $\tau_R^\dagger(x)$ mod π) est le morphisme surjectif $s : A_0 \twoheadrightarrow k(x)$ de départ (resp. le morphisme surjectif $k[\underline{t}] \twoheadrightarrow k(x)$) [M-W, theo 3.2]. Donc $\mathcal{V}(x)$ est un quotient de $\hat{A}$ et $\mathcal{V}(x) \simeq W(x)[\pi]$, qui est un anneau de valuation discrète, est une extension finie étale de $\mathcal{V}$ de rang deg x. Le noyau du morphisme

$$\hat{\tau}_K(x) := \hat{\tau}(x) \otimes_{\mathcal{V}} K : \hat{A}_K \twoheadrightarrow K(x) = \mathrm{Frac}(\mathcal{V}(x))$$

est ainsi un idéal maximal $\mathfrak{q}_x$ de $\hat{A}_K$ et le diagramme

(1.1)
$$\begin{tikzcd} A_K^\dagger \arrow[r, hook] \arrow[d, "F_{A_K^\dagger}"'] & \hat{A}_K \arrow[r, two heads, "\hat{\tau}_K(x)"] \arrow[d, "F_{\hat{A}_K}"'] & K(x) \arrow[d, "\sigma_{K(x)}"] \\ A_K^\dagger \arrow[r, hook] & \hat{A}_K \arrow[r, two heads, "\hat{\tau}_K(x)"] & K(x) \end{tikzcd}$$

commute. On notera $\tau_K^\dagger(x)$ la flèche composée

(1.2)
$$\tau_K^\dagger(x) = \tau^\dagger(x) \otimes_{\mathcal{V}} K : A_K^\dagger \xrightarrow{\varphi} \hat{A}_K \overset{\hat{\tau}_K(x)}{\twoheadrightarrow} K(x) \ ;$$

remarquons que $\tau_K^\dagger(x)$ est aussi surjectif car φ induit une bijection entre les idéaux maximaux de $\hat{A}_K$ et ceux de $A_K^\dagger$ [G-K 2, theo 1.7]. Par le morphisme de spécialisation [B 2, (0.2.2.1)]

$$sp : Spm\ \hat{A}_K \to Spec\ A_0$$

l'image de $\{\mathfrak{q}_x\}$ n'est autre que $\{\mathfrak{m}_x\}$; de plus $\hat{\tau}(x) : \hat{A} \twoheadrightarrow \mathcal{V}(x)$ est localisé en $\{\mathfrak{p}_x\} \in Spec\ \hat{A}$, où $\mathfrak{p}_x$ est l'unique idéal maximal de $\hat{A}$ au-dessus de $\mathfrak{m}_x$. En définissant l'application (encore appelée **relèvement de Teichmüller**)

$$\hat{T}_K : Spm\ A_0 \to Spm\ \hat{A}_K \tag{1.3}$$

par $\hat{T}_K(x) = \{\text{Ker}\ \hat{\tau}_K(x)\} = \{\mathfrak{q}_x\}$, on vient de prouver que $\hat{T}_K$ est **une section du morphisme de spécialisation**, considéré comme une application

$$sp : |Spm\ \hat{A}_K| \ \to |Spec\ A_0|.$$

La proposition suivante nous sera utile au §5 :

Proposition (1.4). *Soit $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un morphisme de $\hat{A}$-modules tels que $\mathcal{N}$ soit de type fini. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *ϕ est surjectif.*

(ii) *Pour tout point fermé x de $Spec\ A_0$ le morphisme*

$$\phi_x := \hat{\tau}(x)^*(\phi)\ :\ \mathcal{M}_x = \hat{\tau}(x)^*(\mathcal{M}) \to \mathcal{N}_x = \hat{\tau}(x)^*(\mathcal{N})$$

est surjectif.

Démonstration. L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ est claire par exactitude à droite du produit tensoriel.

Pour l'implication réciproque, supposons (ii). Soit x un point fermé de $Spec\ A_0$ correspondant à l'idéal maximal $\mathfrak{m}_x$ de A_0 et $\mathfrak{p}_x$ l'unique idéal maximal de $\hat{A}$ au-dessus de $\mathfrak{m}_x$. Le relèvement de Teichmüller $\hat{\tau}(x) : \hat{A} \twoheadrightarrow \mathcal{V}(x)$ se factorise via $\hat{\tau}'(x) : \hat{A}_{\mathfrak{p}_x} \twoheadrightarrow \mathcal{V}(x)$ et $\hat{\tau}'(x)$ induit un isomorphisme

$$\hat{A}_{\mathfrak{p}_x}/\mathfrak{p}_x\hat{A}_{\mathfrak{p}_x} \simeq \mathcal{V}(x)/\pi\ \mathcal{V}(x) = k(x)\ . \tag{1.4.1}$$

Notons $\phi_{\mathfrak{p}_x} = \phi \otimes_{\hat{A}} \hat{A}_{\mathfrak{p}_x}$. La surjectivité de ϕ_x fournit celle de ϕ_x mod π ; or l'isomorphisme (1.4.1) identifie $\phi_{\mathfrak{p}_x}$ mod $\mathfrak{p}_x$ à ϕ_x mod π. D'où la surjectivité de $\phi_{\mathfrak{p}_x}$ par Nakayama [*EGA* 0_I; (7.1.14)] et ceci pour tout idéal maximal $\mathfrak{p}_x$ de $\hat{A}$. La proposition en résulte. □

2. Fonctions L des F-modules convergents

Avec les notations du §1 et $\mathcal{A} = \hat{A}$ ou $\hat{A}_K$ ou A_n on désigne par $\mathbf{F^a}$-$\mathbf{Mod}(\mathcal{A})$ (resp. $\mathbf{F^a}$-$\mathbf{Modlib}(\mathcal{A})$) la catégorie des $\mathcal{A}$-modules projectifs de type fini (resp. des $\mathcal{A}$ -modules libres de type fini) $\mathcal{M}$ munis d'un morphisme de Frobenius (non nécessairement un isomorphisme)

$$\phi_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}^{\sigma} := F_{\mathcal{A}}^{*}(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$$

Un tel $\mathcal{M}$ est appelé un F-**module convergent** (resp. un F-**module libre convergent**). On note $\mathbf{F^a}$-$\mathbf{Mod}(\hat{\mathbf{A}})^{\mathbf{0}}$ (resp. $\mathbf{F^a}$-$\mathbf{Modlib}(\hat{\mathbf{A}})^{\mathbf{0}}$) la sous-catégorie de $\mathbf{F^a}$-$\mathbf{Mod}(\hat{\mathbf{A}})$ (resp. $\mathbf{F^a}$-$\mathbf{Modlib}(\hat{\mathbf{A}})$) formée des objets $\mathcal{M}$ unités, i.e. tel que le Frobenius soit un isomorphisme : un tel $\mathcal{M}$ est appelé F-**module convergent unité** (resp. F-**module libre convergent unité**).

Soit $\mathcal{M} \in F^a\text{-Mod}(\hat{A}_K)$. La fibre $\mathcal{M}_x$ de $\mathcal{M}$ en $x \in |X|$ est par définition

$$\mathcal{M}_x := \hat{\tau}_K(x)^*(\mathcal{M}) \ , \tag{2.1}$$

et $\phi_{\mathcal{M}}$ induit

$$\phi_x = \phi_{\mathcal{M}} \otimes_{\hat{A}_K} K(x) : \sigma_{K(x)}^{*}(\mathcal{M}_x) \to \mathcal{M}_x \ , \tag{2.2}$$

d'après la commutativité du diagramme (1.1).

L'itéré deg x fois de ϕ_x est un endomorphisme $K(x)$-linéaire du $K(x)$-espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_x$

$$\phi_x^{\deg\, x} : \mathcal{M}_x \to \mathcal{M}_x \ .$$

Notons

$$\det(\mathcal{M}_x, T) = \det(1 - T\ \phi_x^{\deg\, x}, \mathcal{M}_x) \tag{2.3}$$

le «polynôme caractéristique» de $\phi_x^{\deg\, x}$.

Pour $\mathcal{M} \in F^a\text{-Mod}(\hat{A})$ (resp. $\mathcal{M} \in F^a\text{-Mod}(A_n)$)
on définit de même

$$\mathcal{M}_x := \hat{\tau}(x)^*(\mathcal{M}) \ (\text{resp. } \mathcal{M}_x := \hat{\tau}_n(x)^*(\mathcal{M}))$$

$$\det(\mathcal{M}_x, T) = \det(1 - T\ \phi_x^{\deg\, x}, \mathcal{M}_x). \tag{2.4}$$

Soit $(\mathcal{M}, \phi) \in F^a$-Mod$(\hat{A})$; posons $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}/\pi^{n+1}\mathcal{M}$ et $\phi_n = \phi \bmod \pi^{n+1}$; et pour $x \in |X|$ notons

$$(\mathcal{M}_n)_x = \hat{\tau}_n(x)^*(\mathcal{M}_n)), (\phi_n)_x = \hat{\tau}_n(x)^*(\phi_n),$$

$$(\mathcal{M}_x)_n = \mathcal{M}_x/\pi^{n+1}\mathcal{M}_x, (\phi_x)_n = \phi_x \text{ mod } \pi^{n+1} .$$

Puisque $(\mathcal{M}_n)_x = (\mathcal{M}_x)_n =: \mathcal{M}_{x,n}$ et $(\phi_n)_x = (\phi_x)_n =: \phi_{x,n}$ on a la relation

(2.4 bis) $$\det(1 - T\ (\phi_{x,n})^{\deg\ x}, \mathcal{M}_{x,n}) \equiv \det(1 - T\ \phi_x^{\deg\ x}, \mathcal{M}_x) \bmod \pi^{n+1} .$$

Lemme (2.5). *Avec les notations précédentes, on a :*

(i) *Si $\mathcal{M} \in F^a$-Mod$(\hat{A}_K)$, alors det $(\mathcal{M}_x, T) \in K[T]$.*

(ii) *Si $\mathcal{M} \in F^a$-Mod$(\hat{A})$, alors det $(\mathcal{M}_x, T) \in \mathcal{V}[T]$.*

(iii) *Si $\mathcal{M} \in F^a$-Mod(A_n), alors det $(\mathcal{M}_x, T) \in \mathcal{V}_n[T]$.*

Démonstration. Pour (i), soient $(e_i)_{i=1,...,r}$ (resp. $(e_i \otimes 1)_{i=1,...,r}$) une base locale de $\mathcal{M}$ (resp. de $\mathcal{M}^\sigma$), et $C(\underline{X})$ la matrice de $\phi_{\mathcal{M}}$ dans ces bases respectives. Alors

$$C(\underline{X}) = \sum_{\underline{u} \in \mathbb{N}^d} a_{\underline{u}}\ \underline{X}^{\underline{u}},$$

avec $a_{\underline{u}}\ \in \pi^\alpha\ M_r(\mathcal{V})$ pour un $\alpha \in \mathbb{Z}$ et

$$det(\mathcal{M}_x, T) = det\{1 - T\ C(\underline{t}(x)^{q^{(\deg\ x)-1}}) \times ... \times C(\underline{t}(x)^q) \times C(\underline{t}(x))\}$$

où $\underline{t}(x)^\beta = t_1(x)^\beta \times ... \times t_d(x)^\beta$ et les $t_j(x)$ sont les coordonnées de $\hat{\tau}_K(x)$. Il est clair que det $(\mathcal{M}_x, T)$ a des coefficients invariants par l'action du Frobenius $\sigma_{K(x)}$, car $\sigma_{K(x)}$ envoie $\underline{t}(x)$ sur $\underline{t}(x)^q$; d'où le (i).

Les cas (ii) et (iii) sont analogues. □

Si l'on note $\tilde{\mathcal{M}}_x$ l'espace vectoriel $\mathcal{M}_x$ vu comme K-espace vectoriel et $\tilde{\phi}_x$ son endomorphisme de Frobenius on a

$$det(\mathcal{M}_x, T) = det(1 - T\ \phi_x^{\deg\ x}) = det_K(1 - T\ \tilde{\phi}_x^{\deg\ x})^{-1/\deg\ x} .$$

Définition-proposition (2.6). *La fonction L de $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}}) \in F^a$-Mod$(\hat{A}_K)$ est définie par*

$$L(Spec\ A_0, \mathcal{M}, t) = \prod_{x \in |Spec\ A_0|} det(1 - t^{\deg\ x}\ \phi_x^{\deg\ x} \mid \mathcal{M}_x)^{-1} \in K[[t]]$$

$$= \prod_{x \in |Spec\ A_0|} det(1 - t^{\deg\ x}\ \tilde{\phi}_x^{\deg\ x} \mid \tilde{\mathcal{M}}_x)^{-1/\deg\ x}\ .$$

Si $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}}) \in F^a$*-Mod*$(\hat{A})$ *on définit de même* $L(Spec\ A_0, \mathcal{M}, t)$ *et alors*

$$L(Spec\ A_0, \mathcal{M}, t) = L(Spec\ A_0, \mathcal{M}_K, t) \in \mathcal{V}[[t]])\ ,$$

où l'on a posé

$$(\mathcal{M}_K, \phi_{\mathcal{M}_K}) := (\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}}) \otimes_{\hat{A}} \hat{A}_K\ .$$

La fonction L *de* $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}}) \in F^a$*-Mod*$(A_n)$ *est définie par*

$$L(Spec\ A_0, \mathcal{M}, t) = \prod_{x \in |Spec\ A_0|} det(1 - t^{\deg\ x}\ \phi_x^{\deg\ x} \mid \mathcal{M}_x)^{-1} \in \mathcal{V}_n[[t]]\ .$$

Si $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}}) \in F^a$*-Mod*$(\hat{A})$*, il résulte de (2.4 bis) que*

$$L(Spec\ A_0, \mathcal{M}, t) \equiv L(Spec\ A_0, \mathcal{M}_n, t) \bmod \pi^{n+1}\ .$$

Lemme (2.7). *Pour établir la méromorphie p-adique de* $L(Spec\ A_0, \mathcal{M}, t)$ *pour* $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}}) \in F^a$*-Mod*$(\hat{A}_K)$ *on peut supposer qu'il existe* $(\mathcal{M}', \phi_{\mathcal{M}'}) \in F^a$*-Mod*$(\hat{A})$ *tel que* $\mathcal{M}'$ *est libre et* $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}}) = (\mathcal{M}', \pi^\alpha \phi_{\mathcal{M}'}) \otimes_{\hat{A}} \hat{A}_K$ *pour un* $\alpha \in \mathbb{Z}$*. On a alors*

$$L(Spec\ A_0, \mathcal{M}, t) = L(Spec\ A_0, \mathcal{M}', \pi^\alpha t).$$

Démonstration. Puisque $\mathcal{M}$ est projectif de type fini sur $\hat{A}_K$, et qu'un ouvert de $Spec\ \hat{A}_K$ est intersection d'un ouvert de $Spec\ \hat{A}$ avec $Spec\ \hat{A}_K$, il existe un recouvrement fini de $Spec\ \hat{A}_K$ par des ouverts $U_K = Spec\ B_K$, où $B = \hat{A}\ [1/g], g \in \hat{A}$, tels que

$$\mathcal{M} \otimes_{\hat{A}_K} B_K \simeq \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} B_K\ e_i.$$

Relevons $g \bmod \pi =: g_0$ en $f \in A$; comme on a un isomorphisme $\hat{B} \simeq \widehat{A[1/f]}$ [Et 3, cor 1 du théo 4] on en déduit que

$$\mathcal{N} := \mathcal{M} \otimes_{\hat{A}_K} \hat{B}_K \simeq \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} \widehat{A[1/f]}_K\ e_i$$

et que la matrice $C(\underline{X})$ du Frobenius $\phi_{\mathcal{N}}$ est à coefficients dans $\pi^\alpha \widehat{A[1/f]}$, avec $\alpha \in \mathbb{Z}$.

La fonction $L(Spec\ A_0, \mathcal{M}, t)$ est définie par un produit eulérien sur les points fermés de $Spec\ A_0$ et ceux-ci sont en bijection avec les points fermés de $Spf\ \hat{A}$: un recouvrement ouvert fini de $Spf\ \hat{A}$ est fourni par des $Spf\ \widehat{A[1/f]}$, $f \in A$ comme ci-dessus ; on peut donc prendre

$$\mathcal{M}' = \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} \widehat{A[1/f]}\ e_i$$

avec pour matrice du Frobenius $\phi_{\mathcal{M}'}$ la matrice $\pi^{-\alpha}\ C(\underline{X})$, à coefficients dans $\widehat{A[1/f]}$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}'^{\sigma} \arrow[r, "\phi_{\mathcal{M}'}"] \arrow[d, hook] & \mathcal{M}' \arrow[d, hook] \\ \mathcal{N}^{\sigma} = \mathcal{M}'^{\sigma}_K \arrow[r, "\pi^{-\alpha}\phi_{\mathcal{N}}"'] & \mathcal{N} = \mathcal{M}'_K. \end{tikzcd}$$

Le couple $(\mathcal{M}', \phi_{\mathcal{M}'})$ est ce que Wan appelle une σ-module convergent [W 2], [W 3]. $\square$

3. Fonctions L des F-modules surconvergents

Avec les notations du §1 et $\mathcal{A} = A^\dagger$ ou $A_K^\dagger$ et par analogie avec le §2 on désigne par $\mathbf{F^a}$-$\mathbf{Mod}(\mathcal{A})$ (resp. $\mathbf{F^a}$-$\mathbf{Modlib}(\mathcal{A})$) la catégorie des **F-modules surconvergents**, i.e. la catégorie des $\mathcal{A}$-modules projectifs (resp. $\mathcal{A}$-modules libres) de type fini M muni d'un morphisme de Frobenius (non nécessairement un isomorphisme)

$$\phi_M : M^\sigma = F_{\mathcal{A}}^*(M) \to M$$

On note $\mathbf{F^a}$-$\mathbf{Mod}(\mathbf{A}^\dagger)^\mathbf{0}$ (resp. $\mathbf{F^a}$-$\mathbf{Modlib}(\mathbf{A}^\dagger)^\mathbf{0}$) la sous-catégorie de $\mathbf{F^a}$-$\mathbf{Mod}(\mathbf{A}^\dagger)$ (resp. $\mathbf{F^a}$-$\mathbf{Modlib}(\mathbf{A}^\dagger)$) formée des objets M unités, i.e. tel que le Frobenius soit un isomorphisme : un tel M est appelé F-**module surconvergent unité** (resp. F-**module libre surconvergent unité**).

Soit $M \in F^a$-Mod$(A_K^\dagger)$. La fibre M_x de M en $x \in |X|$ est par définition

$$M_x := \tau_K^\dagger(x)^*(M), \tag{3.1}$$

et ϕ_M induit

$$\phi_x = \phi_M \otimes_{A_K^\dagger} K(x) : \sigma_{K(x)}^*(M_x) \to M_x \ , \tag{3.2}$$

d'après la commutativité du diagramme (1.1).

L'itéré deg x fois de ϕ_x est un endomorphisme $K(x)$-linéaire du $K(x)$-espace vectoriel de dimension finie M_x

$$\phi_x^{\deg\, x} : M_x \to M_x \ ;$$

on notera $\tilde{M}_x$ l'espace vectoriel M_x vu comme K-espace vectoriel et $\tilde{\phi}_x$ son morphisme de Frobenius.

Notons

$$\det(M_x, T) = \det(1 - T\phi_x^{\deg\, x}, M_x) \ ; \tag{3.3}$$

pour $M \in F^a$-Mod$(A^\dagger)$ on pose de même

$$M_x = \tau^\dagger(x)^*(M) \ , \qquad \det(M_x, T) \ = \det(1 - T \ \phi_x^{\deg\, x}, M_x). \tag{3.4}$$

On démontre le lemme suivant comme (2.5).

Lemme (3.5). *Avec les notations précédentes, on a :*
(i) *Si* $M \in F^a$-*Mod*$(A_K^\dagger)$, *alors* $det(M_x, T) \in K[T]$.
(ii) *Si* $M \in F^a$-*Mod*$(A^\dagger)$, *alors* $det(M_x, T) \in \mathcal{V}[T]$.

De même on a :

Définition et proposition (3.6). *Soit* $(M, \phi_M) \in F^a$-*Mod*$(A_K^\dagger)$ *et* $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}}) \in F^a$-*Mod*$(\hat{A}_K)$ *son image canonique par l'extension des scalaires de* $A_K^\dagger$ *à* $\hat{A}_K$. *La fonction* L *de* (M, ϕ_M) *est définie par*

$$L(Spec\ A_0, M, t) = \prod_{x \in |Spec\ A_0|} det(1 - t^{\deg\ x}\ \phi_x^{\deg\ x}, M_x)^{-1} \in K[[t]]$$

$$= \prod_{x \in |Spec\ A_0|} det(1 - t^{\deg\ x}\ \tilde{\phi}_x^{\deg\ x}, \tilde{M}_x)^{-1/\deg\ x} ,$$

et on a

$$L(Spec\ A_0, M, t) = L(Spec\ A_0, \mathcal{M}, t).$$

Si $(M, \phi_M) \in F^a$-*Mod*$(A^\dagger)$ *on définit de même* $L(Spec\ A_0, M, t)$ *et alors*

$$L(Spec\ A_0, M, t) = L(Spec\ A_0, M_K, t) = L(Spec\ A_0, \mathcal{M}, t) \in \mathcal{V}[[t]],$$

$$\equiv L(Spec\ A_0, M_n, t) \in \mathcal{V}_n[[t]],$$

où l'on a posé

$$M_K := M \otimes_{A^\dagger} A_K^\dagger\ \ ,\ \mathcal{M} := M \otimes_{A^\dagger} \hat{A}\ \ ,\ M_n := M/\pi^{n+1}M\ .$$

Comme (2.7) on montre :

Lemme (3.7). *Pour établir la méromorphie p-adique de* $L(Spec\ A_0, M, t)$ *pour* $(M, \phi_M) \in F^a$-*Mod*$(A_K^\dagger)$ *on peut supposer qu'il existe* $(M', \phi_{M'}) \in F^a$-*Mod*$(A^\dagger)$ *tel que* M' *est libre et* $(M, \phi_M) = (M', \pi^\alpha \phi_{M'}) \otimes_{A^\dagger} A_K^\dagger$ *pour un* $\alpha \in \mathbb{Z}$. *On a alors*

$$L(Spec\ A_0, M, t) = L(Spec\ A_0, M', \pi^\alpha t)\ .$$

3.8. Réduction au cas de l'espace affine

Soient $A = \mathcal{V}[x_1, ..., x_d]/(f_1, ..., f_\epsilon)$ une $\mathcal{V}$-algèbre lisse relevant $A_0, X = \mathrm{Spec}A_0, \underline{x} = (x_1, ..., x_d), R = \mathcal{V}[\underline{x}], (M, \phi_M) \in F^a$-Modlib$(A^\dagger)$: un tel M est ce que Wan appelle un σ-module surconvergent. Dans ce paragraphe nous allons montrer que la fonction $L(X, M, t)$ est une fonction L sur un certain espace affine.

Relevons d'abord M de X à $\mathbb{A}^d_{\mathbb{F}_q}$. On choisit une base $(e_1, ..., e_m)$ de M sur $A^\dagger$ et on note $C \in \mathcal{M}_m(A^\dagger)$ la matrice $m \times m$ à coefficients dans $A^\dagger$ de l'application $F_{A^\dagger}$-linéaire ϕ_M. En notant μ la surjection canonique

$$\mu : \mathcal{V}[x_1, ..., x_d]^\dagger \twoheadrightarrow A^\dagger \ ,$$

on choisit ensuite C_0, une matrice $m \times m$ à coefficents dans $\mathcal{V}[\underline{x}]^\dagger$ telle que $\mu(C_0) = C$. Alors les relations

$$M_0 = \overset{m}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathcal{V}[\underline{x}]^\dagger e_i \ \ , \ \phi_0(e_i) = C_0 e_i$$

définissent un élément $(M_0, \phi_0) \in F^a$-Modlib$(\mathcal{V}[\underline{x}]^\dagger)$, i.e. un F-module libre surconvergent sur $\mathbb{A}^d_{\mathbb{F}_q}$.

Pour se réduire au cas de l'espace affine nous allons faire une petite digression par le F-cristal de Dwork [B 1]. Quitte à passer à une extension totalement ramifiée de $\mathcal{V}$, on peut supposer que $\mathcal{V}$ contient une racine primitive p-ième de l'unité : à toute racine π^* de l'équation

$$(\pi^*)^{p-1} = -p$$

correspond une unique racine primitive p-ième de l'unité $\lambda \in K_0 := \mathbb{Q}_p(\pi^*)$ telle que l'on ait la congruence [Mo 1, theo 4.3]

$$\lambda \equiv 1 + \pi^* \ (\mathrm{mod}\ {\pi^*}^2) \text{ dans } \mathcal{O}_{K_0} \ .$$

La série

$$E(t) = exp(\pi^*(t - t^q))$$

qui converge pour $ord_p(t) > -\frac{p-1}{qp}$ [Mo 1, theo 4.1] est donc surconvergente et $E(1)$ est une racine primitive p-ième de l'unité [Mo 1, theo 4.3]. Soit ψ_0 le caractère additif non trivial de $\mathbb{F}_p$ tel que $\psi_0(1) = E(1)$: pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ posons

$$\psi_r = \psi_0 \circ Tr_{\mathbb{F}_{q^r}/\mathbb{F}_p} \ ;$$

ψ_r est un caractère additif non trivial de $\mathbb{F}_{q^r}$. Au caractère $\psi := \psi_1$ est associé le F-cristal de Dwork $\mathcal{L}_\psi$ sur la droite $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}$ [B 6] : $\mathcal{L}_\psi$ est un F-cristal surconvergent (au sens de Berthelot) libre de rang 1 et si l'on note θ_ψ une base de $\mathcal{L}_\psi$, le Frobenius

$$\phi_{\mathcal{L}_\psi} : F^*\mathcal{L}_\psi \to \mathcal{L}_\psi$$

est donné par [B 1, (1.5.2)]

$$\phi_{\mathcal{L}_\psi}(\theta_\psi \otimes 1) = exp(\pi^*(t - t^q))\theta_\psi = E(t)\theta_\psi \ .$$

Posons $\underline{y} = (y_1, ..., y_s)$; pour $i \in [\![1, s]\!]$, notons $\overline{f_i}$ la réduction de f_i mod π et

$$f(\underline{x}, \underline{y}) = y_1\overline{f_1}(\underline{x}) + ... + y_s\overline{f_s}(\underline{x}) \in \mathbb{F}_q[\underline{x}, \underline{y}] \ .$$

On étend le Frobenius $F_{R^\dagger}$ (défini au §1) de $R^\dagger = \mathcal{V}[\underline{x}]^\dagger$ à $R[\underline{y}]^\dagger = \mathcal{V}[\underline{x}, \underline{y}]^\dagger$ en σ, défini par exemple par $y_i^\sigma = y_i^q$. Le polynôme f définit un morphisme encore noté f

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{A}^{d+s}_{\mathbb{F}_q} = Spec\ (k[\underline{x}, \underline{y}]) & \longrightarrow & Spec\ k[t] = \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q} \\ f(\underline{x}, \underline{y}) & \longleftarrow & t \ . \end{array}$$

Par image inverse par f, le F-cristal de Dwork $\mathcal{L}_\psi$ fournit le F-cristal $\mathcal{L}_{\psi,f} := f^*(\mathcal{L}_\psi)$ surconvergent sur $\mathbb{A}^{d+s}_{\mathbb{F}_q}$, libre de rang 1, de base e, et dont le Frobenius

$$\phi_{\mathcal{L}_{\psi,f}} : F^*\mathcal{L}_{\psi,f} \to \mathcal{L}_{\psi,f}$$

est donné par

$$\phi_{\mathcal{L}_{\psi,f}}(e \otimes 1) = exp(\pi^* \sum_{i=1}^{s} y_i f_i(\underline{x}) - \pi^* \sum_{i=1}^{s} y_i^\sigma f_i(\underline{x}^\sigma))e =: \phi_f(\underline{x}, \underline{y})e \ .$$

Pour $(\underline{x}, \underline{y}) \in \mathbb{A}^{d+s}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_{q^r})$ notons $\tau^\dagger_{R[\underline{y}]}(\underline{x}, \underline{y}) = (\underline{\tilde{x}}, \underline{\tilde{y}})$ son relèvement de Teichmüller [§1] à $R[\underline{y}]^\dagger = \mathcal{V}[\underline{x}, \underline{y}]^\dagger$; alors l'action du Frobenius itérée $r = deg\ x$ fois sur $\mathcal{L}_{\psi,f}$ au point $(\underline{x}, \underline{y})$ est donnée par (cf la preuve de (2.5)) :

$$(3.8.1) \quad \begin{array}{rcl} Tr_{\mathcal{V}}(\phi^{deg\ x}_{(\mathcal{L}_{\psi,f})_{(\underline{x},\underline{y})}}) & = & \phi_f(\underline{\tilde{x}}, \underline{\tilde{y}}) \times \phi_f(\underline{\tilde{x}}^q, \underline{\tilde{y}}^q) \times ... \times \phi_f(\underline{\tilde{x}}^{q^{r-1}}, \underline{\tilde{y}}^{q^{r-1}}) \\ & = & \psi_r(f(\underline{x}, \underline{y})) \ , \end{array}$$

la dernière égalité résultant de [B 1, (1.4)(ii)]. Puisque $\overline{f_1}, ..., \overline{f_\epsilon}$ définissent X dans $\mathbb{A}^d_{\mathbb{F}_q}$, un argument standard sur les sommes de caractères permet de remarquer les égalités :

$$
\begin{aligned}
(3.8.2) \qquad \sum_{\underline{y}\in\mathbb{A}^s_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_{q^r})} \psi_r(f(\underline{x},\underline{y})) &= q^{rs} \qquad \text{si } \underline{x}\in X(\mathbb{F}_{q^r}) \\
&= 0 \quad \text{si } \underline{x}\in(\mathbb{A}^d_{\mathbb{F}_q}\setminus X)(\mathbb{F}_{q^r}) ,
\end{aligned}
$$

où, pour un schéma Y sur $\mathbb{F}_q$, l'on a posé $Y(\mathbb{F}_{q^r}) = \{$points de Y à valeurs dans $\mathbb{F}_{q^r}\}$.

Revenons à présent à notre fonction L de départ ; on a :

$$
\begin{aligned}
L(X,M,t) &= \prod_{x\in|X|} \det(1-t^{deg\ x}\phi_x^{deg\ x}|M_x)^{-1} \\
&= \exp(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{t^r}{r}S_r(X,M))
\end{aligned}
$$

avec

$$
S_r(X,M) = \sum_{x\in X(\mathbb{F}_{q^r})} Tr_{\mathcal{V}}(\phi_x^r|M_x) \ ;
$$

en effet, pour vérifier la concordance des deux écritures de la fonction L, il suffit de passer au logarithme dans les deux expressions et regrouper les facteurs du produit eulérien par degrés (cf [Et 1, II 2]). Dans la définition de $S_r(X,M)$ il est à noter que l'on peut remplacer la somme sur les $x\in X(\mathbb{F}_{q^r})$ par une somme sur les points de Teichmüller $\tau^\dagger(x)$ de $A^\dagger$ à valeurs dans $\mathcal{V}(\mathbb{F}_{q^r}) := W(\mathbb{F}_{q^r})\otimes_W\mathcal{V}$ relativement à $F_{A^\dagger}$, ceci grâce à la bijection entre ces deux ensembles établie au §1.

Pour passer de X à l'espace affine $\mathbb{A}^{d+s}_{\mathbb{F}_q}$ il va nous suffire de réécrire l'expression de $S_r(X,M)$ à l'aide de $\mathcal{L}_{\psi,f}$, en utilisant (3.8.1) et (3.8.2) de la façon suivante :

$$
\begin{aligned}
S_r(X,M) &= \tfrac{1}{q^{rs}} \sum_{(\underline{x},\underline{y})\in(X\times\mathbb{A}^s)(\mathbb{F}_{q^r})} Tr_{\mathcal{V}}(\phi^r_{\underline{x}})\times\psi_r(f(\underline{x},\underline{y})) \\
&= \tfrac{1}{q^{rs}} \sum_{(\underline{x},\underline{y})\in\mathbb{A}^{d+s}(\mathbb{F}_{q^r})} Tr_{\mathcal{V}}(\phi^r_{0,\underline{x}})\times Tr_{\mathcal{V}}(\phi^r_{(\mathcal{L}_{\psi,f})_{(\underline{x},\underline{y})}}) \\
&= \tfrac{1}{q^{rs}} \sum_{(\underline{x},\underline{y})\in\mathbb{A}^{d+s}(\mathbb{F}_{q^r})} Tr_{\mathcal{V}}(\phi^r_{N_{(\underline{x},\underline{y})}})\times Tr_{\mathcal{V}}(\phi^r_{(\mathcal{L}_{\psi,f})_{(\underline{x},\underline{y})}})
\end{aligned}
$$

où $N := pr^*(M_0)$ est l'image inverse de M_0 par la projection canonique $pr : \mathbb{A}^{d+s}_{\mathbb{F}_q} \to \mathbb{A}^d_{\mathbb{F}_q}$ et $\phi_N = pr^*\ (M_0)$. D'où

$$\begin{aligned} S_r(X,M) &= \tfrac{1}{q^{rs}} \sum_{(\underline{x},\underline{y})\in\mathbb{A}^{d+s}(\mathbb{F}_{q^r})} Tr_{\mathcal{V}}((\phi_N \otimes \phi_{\mathcal{L}_{\psi,f}})^r_{(\underline{x},\underline{y})}) \\ &= \tfrac{1}{q^{rs}}\ S_r(\mathbb{A}^{d+s}_{\mathbb{F}_q}, N\otimes\mathcal{L}_{\psi,f}) \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} L(X,M,t) &= \exp(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}(\frac{t}{qs})^r S_r(\mathbb{A}^{d+s}_{\mathbb{F}_q}, N\otimes\mathcal{L}_{\psi,f})) \\ &= L(\mathbb{A}^{d+s}_{\mathbb{F}_q}, N\otimes\mathcal{L}_{\psi,f}, \tfrac{1}{q^s}t) \\ L(X,M,t) &= L(\mathbb{A}^{d+s}_{\mathbb{F}_q}, pr^*(M_0)\otimes f^*(\mathcal{L}_\psi), \tfrac{1}{q^s}t)\ . \end{aligned} \tag{3.8.3}$$

Ceci est le lien que nous recherchions entre les fonctions L sur X et les fonctions L sur l'espace affine. C'est ce passage par le cas plus simple de l'espace affine que Wan utilise dans [W 4] pour la dernière phase de sa preuve de la conjecture de Dwork consacrée aux F-modules libres surconvergents de rang 1.

4. Formule des traces de Monsky généralisée

Soit $X = Spec\ A_0$ un k-schéma lisse ; on considère une $\mathcal{V}$-algèbre lisse A relevant A_0 comme dans (3.8) telle que $Spec\ A$ soit de dimension n sur $Spec\ \mathcal{V}$. Pour tout entier $i \in \mathbb{N}$, on note $\Omega^i_{A^\dagger} := \Omega^i_{A^\dagger/\mathcal{V}}$: puisque A est lisse sur $\mathcal{V}$, $\Omega^i_{A^\dagger}$ est un $A^\dagger$-module projectif de type fini ; en particulier $\Omega^n_{A^\dagger}$ est projectif de rang 1 sur $A^\dagger$. Le morphisme de Frobenius $F_{A^\dagger}$ s'étend à $\Omega^i_{A^\dagger}$ en tant que $\mathcal{V}$-endomorphisme σ-linéaire, injectif et fini localement libre, noté

$$\sigma_i : \Omega^i_{A^\dagger} \to \Omega^i_{A^\dagger} \quad .$$

Puisque $\sigma_i = \wedge^i\sigma_1$ et que $\sigma_1(\omega) \equiv 0 \bmod \pi$, pour $\omega \in \Omega^1_{A^\dagger}$, on en déduit

$$\sigma_i(\omega) \equiv 0 \bmod \pi^i\ , \text{ pour } \omega \in \Omega^i_{A^\dagger} \text{ et } i \geqslant 1. \tag{4.1}$$

Il en résulte une application trace [M-W, theo 8.3]

$$Tr_i : \Omega^i_{A^\dagger} \to \sigma_i(\Omega^i_{A^\dagger})$$

telle que, pour $a \in A^\dagger, \omega \in \Omega^i_{A^\dagger}$, on ait

$$Tr_i(F_{A^\dagger}(a)\omega) = F_{A^\dagger}(a).Tr_i(\omega) \quad .$$

De plus, en tant qu'endomorphisme de $\Omega^i_{A^\dagger}$, on a d'après [M-W, theo 8.5] la relation suivante

$$\sigma_i^{-1} \circ Tr_i \circ \sigma_i = [A_0 : F_{A_0}(A_0)] = q^n \quad .$$

Ainsi l'application σ_i agissant sur $\Omega^i_{A^\dagger}$ a un inverse à gauche quand on tensorise par $\mathbb{Q}$: cet «inverse à gauche» est l'application ψ_i définie par

$$\psi_i = \sigma_i^{-1} \circ Tr_i : \Omega^i_{A^\dagger} \to \Omega^i_{A^\dagger} \quad .$$

L'application ψ_i est un exemple d'opérateur de Dwork, i.e. d'une application σ^{-1}-linéaire dans le sens suivant :

$$\psi_i(F_{A^\dagger}(a)\omega) = a\psi_i(\omega) \ , \ a \in A^\dagger \ , \ \omega \in \Omega^i_{A^\dagger} \ .$$

Les opérateurs de Dwork sont des opérateurs à trace, d'où leur importance ([M-W], [E-LS 1, § 5.1], [W 3]).

Considérons maintenant $(M, \phi_M) \in F^a\text{-Mod}(A^\dagger)$ et le $A^\dagger$-module suivant

$$M^* := Hom_{A^\dagger}(M, \Omega^n_{A^\dagger}) \quad .$$

Définissons un opérateur de Dwork ϕ^* sur M^* comme suit : si $f \in M^*$ et $m \in M$, on pose

$$\phi^*(f)(m) = (\sigma_n^{-1} \circ Tr_n)(f(\phi_M(m))) = \psi_n(f(\phi_M(m))) \quad ;$$

on vérifie que ϕ^* est bien un opérateur de Dwork, car ψ_n en est un :

$$\phi^*(F_{A^\dagger}(a)f) = a\phi^*(f) \ , \ a \in A^\dagger \ , \ f \in M^* \ .$$

Pour $i \in [\![0, n]\!]$, soit

$$\Omega^i M = M \otimes_{A^\dagger} \Omega^i_{A^\dagger} \quad ;$$

ce module $\Omega^i M$ est projectif de type fini sur $A^\dagger$ et l'on pose

$$\phi_i := \phi_M \otimes \sigma_i \quad ;$$

d'après (4.1) on a

(4.2) $\qquad \phi_i \equiv 0 \bmod \pi^i \;$ pour $i \geqslant 1$.

Alors la paire $(\Omega^i M, \phi_i)$ est un F-module surconvergent.
Soit

$$M_i^* := Hom_{A^\dagger}(\Omega^i M, \Omega^n_{A^\dagger}) \quad .$$

On définit de manière analogue un opérateur de Dwork ϕ_i^* sur M_i^* par

$$\phi_i^*(f)(m) = (\sigma_n^{-1} \circ Tr_n)(f(\phi_i(m))) = \psi_n(f(\phi_i(m))), m \in \Omega^i M, f \in M_i^* \;;$$

par (4.2) on a la congruence

(4.3) $\qquad \phi_i^* \equiv 0 \bmod \pi^i$ pour $i \geqslant 1 \quad .$

Pour $i = 0$, on a

$$(\Omega^0_{A^\dagger}, \sigma_0) = (A^\dagger, F_{A^\dagger}) \;, (M_0^*, \phi_0^*) = (M^*, \phi^*) \;.$$

Le $A_K^\dagger$-module $M_i^* \otimes_{\mathcal{V}} K$ est un K-espace vectoriel de dimension infinie, qui est limite inductive d'une suite d'espaces de Banach p-adiques avec des bases orthonormales. Puisque (M, ϕ_M) est surconvergent l'opérateur de Dwork ϕ_i^* donne, après tensorisation par K sur $\mathcal{V}$, un opérateur nucléaire sur l'espace p-adique $M_i^* \otimes_{\mathcal{V}} K$. Il résulte de la théorie spectrale p-adique de Serre [S 2] que le déterminant de Fredholm $det(1 - t\phi_i^* | M_i^* \otimes_{\mathcal{V}} K)$ est bien défini et est une fonction entière de t sur K : les coefficients de cette fonction entière sont en fait dans $\mathcal{V}$ car la construction ci-dessus est partie de ϕ_i à coefficients dans $\mathcal{V}$.

La formule des traces de Monsky généralisée établie par Wan [W 3, appendix] s'énonce alors comme suit :

Théorème (4.4) (Wan) [W 3]. *Avec les notations précédentes soit* $(M, \phi_M) \in$ *F^a-Mod$(A^\dagger)$ un F-module surconvergent sur $X/\mathbb{F}_q$. Alors*

$$L(X, M, t) = \prod_{i=0}^{n} det(1 - t\phi_{n-i}^* | M_{n-i}^* \otimes_{\mathcal{V}} K)^{(-1)^{i+1}} \quad ,$$

où les déterminants de Fredholm $det(1-t\phi_{n-i}^* | M_{n-i}^* \otimes_{\mathcal{V}} K)$ sont bien définis et sont des fonctions entières de t. En particulier $L(X, M, t)$ est p-adiquement méromorphe

Démonstration. Si M est de rang 1, ce théorème est conséquence du théorème 5.3 de [Mo 2]. Le cas général est fourni par le théorème (10.10) de [W 3], dont la démonstration utilise la méthode des groupes de Grothendieck de [Mo 2].□

Corollaire (4.5). *Soient $X = Spec\ A_0$ un k-schéma lisse, A une $\mathcal{V}$-algèbre lisse relevant A_0 et $(M, \phi_M) \in F^a\text{-}Mod(A_K^\dagger)$.*
Alors $L(X, M, t)$ est p-adiquement méromorphe.

Démonstration. Par le lemme (3.7), on peut remplacer M par un $A^\dagger$-module libre M' : $(M', \phi_{M'})$ est alors ce que Wan appelle un σ-module surconvergent [W 2] [W 3]. L'extension au cas affine et lisse de la formule des traces de Monsky-Washnitzer établie par Wan (cf Théorème (4.4)) prouve alors la méromorphie de $L(M', t)$, donc celle de $L(M, t)$. On peut aussi se ramener au cas de l'espace affine [§ 3.8] et utiliser la formule des traces de Monsky [Dw 5, 7(a)]. □

Comme conséquence du théorème (4.4) nous allons, dans la suite de ce §4, montrer que la fonction L d'un F-module convergent à coefficients dans $\hat{A}$ est méromorphe dans le disque unité fermé $|t|_p \leqslant 1$ [Théorème (4.9)].

Auparavant nous allons devoir établir quelques propositions.

Proposition (4.6). *Avec les notations précédentes soit $\mathcal{L}$ un $\hat{A}_K$-module projectif de type fini. Alors*

(i) *Il existe un $A_K^\dagger$-module projectif de type fini L et un $\hat{A}$-module de type fini $\mathcal{M}$ tels que*

$$\mathcal{L} \simeq L \otimes_{A_K^\dagger} \hat{A}_K \text{ et } \mathcal{L} \simeq \mathcal{M} \otimes_{\hat{A}} \hat{A}_K.$$

(ii) *Soit $M := \mathcal{M} \cap L \subset \mathcal{L}$; alors M est un $A^\dagger$-module de type fini et on a des isomorphismes*

$$\mathcal{M} \simeq M \otimes_{A^\dagger} \hat{A} \text{ et } L \simeq M \otimes_{A^\dagger} A_K^\dagger\ .$$

Démonstration.
Pour(i). Puisque $(A^\dagger, A^\dagger/\pi A^\dagger)$ est un couple hensélien [Et 3, théorème 3], l'existence de L résulte d'un théorème de Elkik [Eℓ, cor 1 p.573]. Pour $\mathcal{M}$ il suffit de prendre l'image de l'application composée $\hat{A}^r \xrightarrow{can} \hat{A}_K^r \xrightarrow{s} \mathcal{L}$ où s est une surjection et *can* l'injection canonique.
Pour (ii). Comme on a des injections $L \hookrightarrow \mathcal{L}, \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{L}$ le $A^\dagger$-module $M := \mathcal{M} \cap L$ est le produit fibré de $\mathcal{M}$ et L au-dessus de $\mathcal{L}$, donc par [F-R, prop. 4.2] on a les isomorphismes cherchés. □

Corollaire (4.7). *Avec les notations précédentes soit $\mathcal{M}$ un $\hat{A}$-module de type fini tel que $\mathcal{M}_K := \mathcal{M} \otimes_{\hat{A}} \hat{A}_K$ soit projectif. Alors*

(i) *Il existe un $A^\dagger$-module de type fini M tel que $\mathcal{M} \simeq M \otimes_{A^\dagger} \hat{A}$.*

(ii) *Si de plus $\mathcal{M}$ est projectif alors le M du (i) est projectif de type fini.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition (4.6) à $\mathcal{L} = \mathcal{M}_K$; le cas projectif résultant de la pleine fidélité de $\hat{A}$ sur $A^\dagger$ [Et 3, prop 2 : (2) (ii)]. □

Proposition (4.8). *Avec les notations du §4 soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\hat{A}$-modules de type fini tels que $\mathcal{M}_K$ et $\mathcal{N}_K$ soient projectifs sur $\hat{A}_K$. Soit $\psi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ une application $\hat{A}$-linéaire et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\psi_n : \mathcal{M}_n := \mathcal{M}/\pi^{n+1}\mathcal{M} \to \mathcal{N}_n$ sa réduction modulo π^{n+1}. Considérons comme dans (4.7) un $A^\dagger$-module de type fini M (resp. N) relevant $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{N}$). Alors*

(i) *Il existe une application $A^\dagger$-linéaire $\varphi(n) : M \to N$ relevant ψ_n.*

(ii) *Si ψ est surjective alors $\varphi(n)$ est surjective.*

(iii) *Supposons de plus que $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ ou que $\mathcal{N}$ est projectif sur $\hat{A}$; alors, si ψ est un isomorphisme, $\varphi(n)$ est aussi un isomorphisme.*

Démonstration.
Pour(i). Puisque M est de type fini, on relève une famille génératrice $(\overline{e}_i)_{i=1,\ldots,r}$ de $\mathcal{M}_n \simeq M_n := M/\pi^{n+1}M$ en une famille $(e_i)_{i=1,\ldots,r}$ de M : d'après le lemme de Nakayama [Bour, AC II, §3, n° 2, cor 2 de prop 4], cette famille est génératrice pour M car $\pi A^\dagger \subset RadA^\dagger$. On note $f_1, ..., f_r$ des relèvements de $\psi_n(\overline{e}_1), ..., \psi_n(\overline{e}_r)$ dans N, et on définit $\varphi(n)$ par $A^\dagger$-linéarité en posant $\varphi(n)(e_i) = f_i$.
Pour(ii). On applique [Bour, AC II, §3, n° 2, cor 1 de prop 4].
Pour(iii). Le cas $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ résulte de [Ma, theo 2.4 p. 9]. Supposons $\mathcal{N}$ projectif : si ψ est un isomorphisme ψ_n en est un aussi par [$EGA\ 0_I$(6.7.2)], et donc $\varphi(n)$ aussi [loc. cit.] car N est un $A^\dagger$-module projectif et M est de type fini sur $A^\dagger$. □

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer le résultat de méromorphie promis avant la proposition (4.6) :

Théorème (4.9). *Avec les notations du §4, soit $(\mathcal{M}, \phi) \in F^a$-$Mod(\hat{A})$. Alors*

$$L(X, \mathcal{M}, t)^{(-1)^{dimX-1}} \in 1 + t\mathcal{V}\{t\} ;$$

en particulier $L(X, \mathcal{M}, t)$ est méromorphe dans le disque unité fermé $|t|_p \leqslant 1$.

Démonstration. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on note

$$\psi_n : F^*_{A_n}(\mathcal{M}/\pi^{n+1}\mathcal{M}) \to \mathcal{M}/\pi^{n+1}\mathcal{M}$$

l'application obtenue en réduisant ϕ modulo π^{n+1}. Par la proposition (4.8) on relève ψ_n en $\phi(n) : F^*_{A^\dagger}(M) \to M$; par le début du §4 on en déduit, pour tout entier $i, 0 \leqslant i \leqslant dim\ X$, des endomorphismes $\phi(n)^*_i$ de $M^*_i \otimes_{\mathcal{V}} K$ tels que

(4.9.1) $$det(1 - t\phi(n)^*_i) \in 1 + \pi^i \mathcal{V}[\![\pi^i t]\!] \ [(4.3)]$$

et que $det(1-t\phi(n)^*_i)$ soit une fonction entière de la variable p-adique t [(4.4)], en particulier

(4.9.2) $$det(1 - t\phi(n)^*_i) \in 1 + t\mathcal{V}\{t\} \ .$$

Par le théorème (4.4) on en déduit que

(4.9.3) $$L(X, (M, \phi(n)), t)^{(-1)^{dim X - 1}} \in 1 + t\mathcal{V}\{t\}.$$

Notons $L(\phi(n)) := L(X, (M, \phi(n)), t)$ et $L(\phi) := L(X, (\mathcal{M}, \phi), t)$; par construction on a

(4.9.4) $$L(\phi(n))^{(-1)^{dim X - 1}} \text{mod } \pi^{n+1} \equiv L(\phi)^{(-1)^{dim X - 1}} \text{mod } \pi^{n+1} \in 1 + t\mathcal{V}_n[\![t]\!],$$

donc par (4.9.3) on en déduit

(4.9.5) $$L(\phi)^{(-1)^{dim X - 1}} \text{ mod } \pi^{n+1} \in 1 + t\mathcal{V}_n[t] \ .$$

En passant à la limite sur n ceci achève la preuve du théorème (4.9). $\square$

5. La conjecture de Dwork pour les F-modules surconvergents

5.1. Enoncé de la conjecture et du théorème

Avec les notations des §1, 2, 3 décomposons le «polynôme caractéristique» de $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}}) \in F^a\text{-Mod}(\hat{A}_K)$ au point $x \in |X|$ en

$$det(\mathcal{M}_x, t) := det(1 - t\ \phi_x^{\deg\ x} | \mathcal{M}_x) \in K[t]$$
$$= \underset{j}{\pi}\ (1 - a_{j,x}\ t),$$

où les $a_{j,x}$ sont dans une clôture algébrique K^{alg} de K : plus exactement les $a_{j,x}$ sont dans une extension finie (éventuellement ramifiée) $K'(x) \subset K^{\text{alg}}$ de $K(x)$; soient $\pi'(x)$ une uniformisante de $K'(x)$ et $\sigma_{K'(x)}$ un relèvement à $K'(x)$ de la puissance p^a de $k(x)$ tel que $\sigma_{K'(x)}(\pi'(x)) = \pi'(x)$ [Et 4, 1.1]. Notons $\pi_x = \pi^{\deg\ x}$ et ord_{π_x} la valuation de $K'(x)$ normalisée par $\text{ord}_{\pi_x}(\pi_x) = 1$.

Pour tout nombre rationnel $\alpha \in \mathbb{Q}$ on définit la partie de pente α du «polynôme caractéristique» $det(\mathcal{M}_x, t)$ par le produit

(5.1.1) $$det_\alpha(\mathcal{M}_x, t) := \prod_{\text{ord}_{\pi_x}(a_{j,x}) = \alpha} (1 - a_{j,x}\ t)\ .$$

Si $a_{j,x}$ est l'inverse d'une racine de $det(\mathcal{M}_x, t)$, alors $\sigma_{K'(x)}(a_{j,x})$ en est une aussi par le même argument que pour la démonstration du lemme (2.5), et puisque $\sigma_{K'(x)} : K'(x) \to K'(x)$ est une extension isométrique on a $\text{ord}_{\pi_x}(a_{j,x}) = \text{ord}_{\pi_x}(\sigma_{K'(x)}(a_{jx}))$; par conséquent $det_\alpha(\mathcal{M}_x, t)$ est à coefficients dans K. Comme $\mathcal{M}$ est un $\hat{A}_K$-module projectif de type fini, il existe $\alpha_0 \in \mathbb{Q}$ tel que pour tout $x \in |Spec\ A_0|$ et tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha < \alpha_0$, on ait $det_\alpha(\mathcal{M}_x, t) = 1$. D'autre part $det(\mathcal{M}_x, t)$ s'exprime par un produit fini

(5.1.2) $$det(1 - t\ \phi_x^{\deg\ x}, \mathcal{M}_x) = \prod_{\alpha \in \mathbb{Q}} det_\alpha(\mathcal{M}_x, t)\ .$$

La partie de pente α de la fonction $L(X, \mathcal{M}, t)$ est définie par l'expression

(5.1.3) $$L_\alpha(X, \mathcal{M}, t) := \prod_{x \in |X|} det_\alpha(\mathcal{M}_x, t^{\deg\ x})^{-1} \in K[[t]]\ .$$

Comme $det_\alpha(\mathcal{M}_x, t) = 1$ pour tout $\alpha < \alpha_0$ et tout $x \in |X|$, le théorème de spécialisation de Grothendieck [K 2, (2.3)] montre qu'il n'existe qu'un nombre fini de possibilités pour les pentes de Newton de $\mathcal{M}_x$ (donc pour les

α ci-dessus) pour tous les $x \in |X|$.
D'après (5.1.2) on a ainsi la relation

$$L(X, \mathcal{M}, t) = \prod_{\alpha \in \mathbb{Q}} L_\alpha(X, \mathcal{M}, t)\,; \tag{5.1.4}$$

où le produit (5.4) est fini d'après la remarque précédente.

Pour $r \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{Q}$, on définit plus généralement

$$det^{(r)}(\mathcal{M}_x, t) := \prod_j (1 - (a_{j,x})^r\ t), \tag{5.1.5}$$

$$det_\alpha^{(r)}(\mathcal{M}_x, t) := \prod_{\mathrm{ord}_{\pi_x}(a_{j,x}) = \alpha} (1 - (a_{j,x})^r\ t)\ , \tag{5.1.6}$$

$$L^{(r)}(X, \mathcal{M}, t) := \prod_{x \in |X|} det^{(r)}(\mathcal{M}_x, t^{\deg\ x})^{-1} \in K[[t]]\ , \tag{5.1.7}$$

$$L_\alpha^{(r)}(X, \mathcal{M}, t) := \prod_{x \in |X|} det_\alpha^{(r)}(\mathcal{M}_x, t^{\deg\ x})^{-1} \in K[[t]]\ . \tag{5.1.8}$$

On a encore :

$$L^{(r)}(X, \mathcal{M}, t) = \prod_{\alpha \in \mathbb{Q}} L_\alpha^{(r)}(X, \mathcal{M}, t)\ . \tag{5.1.9}$$

Plus précisément, grâce à l'expression établie par Wan [W 2, lemma 4.4], on a en fait

$$L^{(r)}(X, \mathcal{M}, t) = \prod_{i \geqslant 1} L(X, \mathrm{Sym}^{r-i}\ \mathcal{M}\ \otimes \overset{i}{\Lambda}\ \mathcal{M}, t)^{i \times (-1)^{i-1}}\ , \tag{5.1.10}$$

$$L_\alpha^{(r)}(X, \mathcal{M}, t) = \prod_{i \geqslant 1} L_\alpha(X, \mathrm{Sym}^{r-i}\ \mathcal{M}\ \otimes \overset{i}{\Lambda}\ \mathcal{M}, t)^{i \times (-1)^{i-1}}\ . \tag{5.1.11}$$

Les définitions précédentes s'étendent à $M \in F^a\text{-Mod}(A_K^\dagger)$.

Nous pouvons à présent énoncer la conjecture de Dwork généralisée pour les F^a-modules surconvergents.

(5.1.12) ***Conjecture (Dwork)***. *Soit $M \in F^a$-Mod$(A_K^\dagger)$. Alors, pour tout nombre rationnel $\alpha \in \mathbb{Q}$ et tout entier $r \in \mathbb{N}^*$, la fonction $L_\alpha^{(r)}(X, M, t)$ est* *p-adiquement méromorphe.*

Wan a prouvé cette conjecture dans une série de trois articles [W 2][W 3][W 4] (cf (5.1.13) plus bas).

Notre objectif dans ce § 5 est d'apporter la précision suivante à la preuve de Wan (pour une formulation plus précise cf § 5.4). A isogénie près la fonction L-unité $L_0(X, M, t)$ est la fonction $L(X, \mathcal{M}_0, t)$ du sous-F-module unité $\mathcal{M}_0$ du complété $\mathcal{M}$ de M ; cependant, bien que cette fonction $L(X, \mathcal{M}_0, t)$ soit p-adiquement méromorphe par Wan, nous montrons qu'**il n'existe pas en général de sous-module M_0 de M dont $\mathcal{M}_0$ serait le complété (même si le Frobenius de $\mathcal{M}_0$ est surconvergent)** et auquel on pourrait appliquer la formule des traces de Monsky du § 4 pour obtenir la méromorphie : nous en donnerons deux contre-exemples issus de familles de courbes elliptiques ordinaires, dont l'un est la famille de Legendre.
Après un bref rappel au § 5.2 du contexte historique où Dwork a posé sa conjecture et l'a résolue pour la famille de Legendre des courbes elliptiques ordinaires, nous exposerons au § 5.3 un des aspects de la preuve de Wan ("décomposition de Hodge-Newton, théorème d'isogénie de Katz") qui nous servira à expliciter nos contre-exemples au § 5.4.

Cette conjecture (5.1.12) est établie ci-dessous en (5.1.14) comme conséquence du théorème suivant de Wan :

Théorème (5.1.13) (Wan)[W 3, theo 1.1]. *Soient X une variété affine et lisse définie sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ de caractéristique $p > 0$, et (M, ϕ) un σ-module surconvergent sur $X/\mathbb{F}_q$. Alors, pour tout nombre rationnel s, la fonction L de pente pure $s, L_s(\phi, t)$, attachée à (M, ϕ) est p-adiquement méromorphe.*

Rappelons la terminologie de Wan. Si $X = Spec\ A_0$, on relève A_0 en une $\mathcal{V}$-algèbre lisse A, on note $A^\dagger$ (resp.$\hat{A}$) sa complétée faible (resp. son séparé complété) et $F_{A^\dagger}$ (resp. $F_{\hat{A}}$) un relèvement du Frobenius de A_0 à $A^\dagger$ (resp. à $\hat{A}$). Un σ-module surconvergent est ce que nous avons appelé un F-module surconvergent libre, i.e. la donnée d'un $A^\dagger$-module libre de type fini M muni d'un morphisme de Frobenius

$$\phi : F^*_{A^\dagger} M =: M^\sigma \to M \quad .$$

L'expression $L_s(\phi, t) := L_s(X, (M, \phi), t)$ a été définie en (5.1.3).

La démonstration par Wan de ce théorème (5.1.13) s'effectue en deux phases :
La première phase, regroupée dans le premier article [W 3], est une phase de réduction :

– de la pente s à la pente zéro,
– d'une pente zéro de rang r à une pente zéro de rang 1,
– de X affine et lisse sur $\mathbb{F}_q$ à l'espace affine $\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_q}$.

Cette partie est de nature algébrique via :

– la formule des traces de Monsky,
– le théorème de spécialisation de Grothendieck,
– la décomposition de Hodge-Newton,
– le théorème d'isogénie de Katz.

La deuxième phase, regroupée au sein du deuxième article [W 4], est de nature plus analytique :

– par le travail avec des modules de rang infini,
– par des processus de passage à la limite dans des familles de fonctions L méromorphes. □

Avant d'examiner plus en détail au §5.3 les parties "décomposition de Hodge-Newton, théorème d'isogénie de Katz" de la preuve de Wan, le théorème (5.1.13) nous permet d'énoncer :

Corollaire (5.1.14). *Soient $X = Spec(A_0)$ un k-schéma lisse, A une $\mathcal{V}$-algèbre lisse relevant A_0 et $M \in F^a$-$Mod(A_K^\dagger)$. Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$ et tout $r \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $L_\alpha^{(r)}(X, M, t)$, et $L^{(r)}(X, M, t)$ sont p-adiquement méromorphes.*

Démonstration. Par stabilité de la catégorie F^a-Mod$(A_K^\dagger)$ par puissances symétriques et extérieures [W 2, § 3] la conjecture (5.1.12) se ramène au cas $r = 1$. Par la même démonstration que celle du lemme (3.7) on peut supposer qu'il existe un F^a-module libre surconvergent $(M', \phi_{M'}) \in F^a$-Mod$(A^\dagger)$ tel que

$$(M, \phi_M) = (M', \pi^\beta \phi_{M'}) \otimes_{A^\dagger} A_K^\dagger \text{ pour un } \beta \in \mathbb{Z} ,$$

et
$$L(M, t) = L(M', \pi^\beta t) .$$

On est ramené à montrer que $L_\alpha(Spec\, A_0, M', t)$ est p-adiquement méromorphe, ce qui résulte du théorème de Wan (5.1.13). □

5.2. Petit rappel historique

La conjecture de Dwork, qui date du début des années 70 [Dw 5], est venue des tentatives de Dwork pour comprendre les variations analytiques p-adiques des parties «pures» d'une variété lorsque celle-ci évolue au sein d'une famille sur un corps fini de caractéristique $p > 0$, i.e de comprendre les variations des zéros et des pôles de la fonction zêta d'une famille de variétés lorsque le paramètre varie.

Dans le cas de la famille de Legendre des courbes elliptiques ordinaires que Dwork étudie en détail dans [Dw 2], Dwork avait prouvé sa conjecture sur la méromorphie de la fonction L associée [Dw 3] : dans ce cas le point clé de sa preuve est l'existence d'un «relèvement excellent» (excellent lifting) du Frobenius (défini dans [Dw 4, §5], [Dw 5, §2] comme laissant stable le premier cran de la filtration de Hodge par le Frobenius agissant sur la cohomologie de de Rham relative d'une famille de variétés) qui permet d'appliquer la formule des traces de Monsky et d'en déduire la méromorphie [Dw 3] ; voir à ce propos l'article de Katz [K 3, §A3] où cette stabilité du premier cran de la filtration de Hodge par le Frobenius est automatique lorsque l'on choisit le «relèvement canonique» du Frobenius (le «relèvement canonique» est donc un «relèvement excellent»). Dwork a également prouvé sa conjecture pour certaines familles de surfaces $K3$ ordinaires [Dw 5]. L'ennui de cette méthode c'est qu'elle repose sur l'existence des «relèvements excellents» du Frobenius, existence qui n'est pas assurée dans le cas général comme l'a prouvé Sperber [Sp, §3].

On peut se demander également l'intérêt qu'il y a de connaître la méromorphie de la fonction L dans la conjecture de Dwork : c'est qu'elle donne des estimations p-adiques de sommes de caractères, estimations qui généralisent celles obtenues par les conjectures de Weil. Illustrons cette remarque sur un exemple. Considérons un morphisme propre et lisse $f : X \to Y$ de variétés définies sur $\mathbb{F}_q$: alors la fonction zêta unité de cette famille est donnée par [E-LS 2] :

$$Z_u(Y/X, t) = \prod_m L(X, R^m f_* \mathbb{Q}_p, t)^{(-1)^m}$$

et Dwork conjecture, pour tout entier m, la méromorphie de la fonction $L(X, R^m f_* \mathbb{Q}_p, t)$. Or $L(X, R^m f_* \mathbb{Z}_p, t)$ est donnée par la fonction génératrice

$$L(X, R^m f_* \mathbb{Z}_p, t) = exp\ (\sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k(R^m f_* \mathbb{Z}_p)}{k} t^k) \quad , \tag{5.2.1}$$

où $S_k(R^m f_* \mathbb{Z}_p)$ est une somme de caractères sur les points fermés de X. La méromorphie (supposée) de la fonction $L(X, R^m f_* \mathbb{Z}_p, t)$ et le théorème de factorisation p-adique de Weierstraß montrent qu'il existe des entiers p-adiques $\alpha_i (1 \leqslant i < +\infty)$ et des entiers p-adiques $\beta_j (1 \leqslant j < +\infty)$, algébriques sur K [Ro, chap 6, 2.2, theo 2 (a),p 312], tels que

$$L(X, R^m f_* \mathbb{Z}_p, t) = \frac{\prod_{i \geqslant 1} (1 - \alpha_i t)}{\prod_{j \geqslant 1} (1 - \beta_j t)} \tag{5.2.2}$$

avec

$$\lim_{i \to +\infty} \alpha_i = \lim_{j \to +\infty} \beta_j = 0 \quad .$$

En prenant les logarithmes dans (5.2.1) et (5.2.2), il en résulte, pour tout entier k, l'égalité

$$S_k = \sum_{j \geqslant 1} \beta_j^k - \sum_{i \geqslant 1} \alpha_i^k \quad . \tag{5.2.3}$$

Cette formule généralise la formule classique du nombre de points rationnels de X dans $\mathbb{F}_{q^k}$ qui résulte des conjectures de Weil, et dans ce cas la somme dans (5.2.3) ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls. Dans le cas général, si l'on ne considère qu'un nombre fini de termes β_j et α_i dans (5.2.3), on obtient une formule asymptotique p-adique pour des sommes de caractères p-adiques : plus on prend de termes et plus la précision augmente.

5.3. F-modules convergents ordinaires

Dans ce §5.3. on supposera simplement que k est un corps parfait de caractéristique $p > 0$, $X = Spec\ A_0$ est un k-schéma lisse et A une $\mathcal{V}$-algèbre lisse relevant A_0.

5.3.1. Définitions

Soit $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}}) \in F^a\text{-Mod}(\hat{A})$ un F-module convergent .

A la suite de Katz et Deligne [K 2, II, 2.4, Rks p 148], [Deℓ 2], on dit que $\mathcal{M}$ **est un F-module convergent ordinaire de niveau** m s'il existe une filtration de $\mathcal{M}$ par des sous F-modules convergents (donc localement libres de type fini)

(5.3.1.1) $$0 \subset \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1 \subset ... \subset \mathcal{M}_{i-1} \subset \mathcal{M}_i \subset ... \subset \mathcal{M}_m = \mathcal{M}$$

tels que $(\mathcal{M}_i/\mathcal{M}_{i-1}, \phi_{\mathcal{M}_i/\mathcal{M}_{i-1}})$, où $\phi_{\mathcal{M}_i/\mathcal{M}_{i-1}}$est induit par $\phi_{\mathcal{M}}$, soit de la forme $(\mathcal{U}_i, \pi^i\ \phi_i)$, où $(\mathcal{U}_i, \phi_i)$ est un F-module convergent unité (donc localement libre de type fini). On dit que $\mathcal{M} \in F^a\text{-Mod}(\hat{A})$ est **ordinaire** s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{M}$ soit ordinaire de niveau m.

Pour les définitions et propriétés des polygones de Hodge et de Newton de $\mathcal{M}$ nous renvoyons le lecteur à [K 2, I, 1.2, 1.3 et 2.3 p 142].

Puisque k est parfait, si $\mathcal{M} \in F^a\text{-Mod}(\hat{A})$ est ordinaire, il est clair qu'en tout point $x \in |X|$ les polygones de Hodge et de Newton de $\mathcal{M}$ coïncident et qu'ils sont constants, i.e. indépendants de $x \in |X|$ [loc. cit.]. La réciproque est vraie puisque X est un schéma sur un corps parfait k de caractéristique $p > 0$ et X est lisse sur k [K 2, II, 2.4 Rks p 148], [W 2, lemma 3.6], [W 3, theo 7.2, cor 7.3].

5.3.2. Rappels des résultats de Wan sur la décomposition de Hodge-Newton et le théorème d'isogénie

Nous utiliserons en 5.4 les résultats suivants de Wan.

Lemme (5.3.2.1) (Wan) [W3, 4.5]. *Avec les notations de 5.3, soit* $(M, \phi_M) \in F^a$*-Modlib* $(A^\dagger)$ *un F-module libre surconvergent. Alors, quitte à rétrécir X si nécessaire, le F-module surconvergent (M, ϕ_M) admet une filtration ϕ_M-stable par des $A^\dagger$-modules libres de type fini à quotients libres de type fini*

$$0 \subset N_0 \subset M$$

tels que la restriction ϕ_{N_0} de ϕ_M à N_0 est nilpotente et le quotient M/N_0 est un F-module libre surconvergent dont le Frobenius est injectif.

Dans le cas où l'on part d'un F-module libre convergent ordinaire on a le résultat suivant de Wan qui améliore (5.3.1.1) :

Proposition (5.3.2.2)(Wan)[W 3, 4.9, 4.1]. *Avec les notations de 5.3 soit $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}}) \in F^a$-Modlib $(\hat{A})$ un F-module libre convergent ordinaire de niveau m. Alors $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}})$ admet une filtration finie $\phi_{\mathcal{M}}$-stable par des $\hat{A}$-modules libres de type fini à quotients libres de type fini*

$$0 \subset \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1 \subset ... \subset \mathcal{M}_{i-1} \subset \mathcal{M}_i \subset ... \subset \mathcal{M}_m = \mathcal{M}$$

tels que

(a) Le quotient $\mathcal{M}_i/\mathcal{M}_{i-1}$ est un F-module libre convergent de la forme $(\mathcal{U}_i, \pi^i\phi_i)$ où $(\mathcal{U}_i, \phi_i) \in F^a$-Modlib $(A^\dagger)^0$ est un F-module libre convergent unité pour chaque entier $i \in [\![0, m]\!]$.

(b) Pour chaque entier $i \in [\![0, m]\!]$ on a une décomposition

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_i \oplus \mathcal{M}_{(i+1)}$$

dans laquelle $\mathcal{M}_{(i+1)}$ est un sous $\hat{A}$-module libre de type fini de $\mathcal{M}$ tel que $\phi_{\mathcal{M}}(F^*_{\hat{A}}\mathcal{M}_{(i+1)}) \subset \pi^{i+1}\mathcal{M}$; en particulier $\mathcal{M}/\mathcal{M}_i$ est muni d'un Frobenius divisible par π^{i+1}.

(c) $\phi_{\mathcal{M}}$ est injectif.

Démonstration. Seul le point (c) reste à prouver. Or l'injectivité de $\phi_{\mathcal{M}}$ est équivalente à la non nullité de $\det(\phi_{\mathcal{M}})$; celle-ci est claire car

$$det(\phi_{\mathcal{M}}) = \prod_{i=0}^{i=m} det(\pi^i\phi_i) \neq 0. \qquad \square$$

Voici la version de Wan du théorème d'isogénie de Katz :

Théorème (5.3.2.3)(Wan)[W3, 7.2]. *Avec les notations de 5.3, soient $(M, \phi_M) \in F^a$-Modlib $(A^\dagger)$ un F-module libre surconvergent à «pentes de Newton» des entiers naturels et $\mathcal{M} = M \otimes_{A^\dagger} \hat{A} \in F^a$-Modlib $(\hat{A})$ le F-module convergent associé; on suppose que ϕ_M est injectif. Alors, quitte à rétrécir X si nécessaire, le F-module surconvergent (M, ϕ_M) est isogène à un F-module surconvergent $(M', \phi_{M'})$ dont le F-module convergent associé $(\mathcal{M}', \phi_{\mathcal{M}'})$ est ordinaire. C'est-à-dire que le F-module convergent $(\mathcal{M}', \phi_{\mathcal{M}'})$ admet une filtration finie $\phi_{\mathcal{M}'}$-stable par des $\hat{A}$-modules libres de type fini à* *quotients libres de type fini*

$$0 \subset \mathcal{M}'_0 \subset \mathcal{M}'_1 \subset ... \subset \mathcal{M}'_{i-1} \subset \mathcal{M}'_i \subset ... \subset \mathcal{M}'_m = \mathcal{M}'$$

tels que

(a) *Le quotient $\mathcal{M}'_i/\mathcal{M}'_{i-1}$ est un F-module libre convergent de la forme $(\mathcal{U}_i, \pi^i\phi_i)$ où $(\mathcal{U}_i, \phi_i) \in F^a$-Modlib $(A^\dagger)^0$ est un F-module libre convergent unité pour chaque entier $i \in [\![0, m]\!]$.*

(b) *Pour chaque entier $i \in [\![0, m]\!]$ on a une décomposition*

$$\mathcal{M}' = \mathcal{M}'_i \oplus \mathcal{M}'_{(i+1)}$$

dans laquelle $\mathcal{M}'_{(i+1)}$ est un sous $\hat{A}$-module libre de type fini de $\mathcal{M}'$ tel que $\phi_{\mathcal{M}'}(F^*_{\hat{A}}\mathcal{M}'_{(i+1)}) \subset \pi^{i+1}\mathcal{M}'$.

Démonstration. C'est [W 3, 7.2] hormis le F-module surconvergent M' dont l'existence est mentionnée dans la preuve de [W 2, 7.2] par Wan, et l'assertion (b) qui résulte de (5.3.2.2)(b). □

5.4 Non surconvergence de la partie unité : deux contre-exemples

5.4.1 Pentes des fonctions L

Soit $X = SpecA_0$ un k-schéma lisse, A une $\mathcal{V}$-algèbre lisse relevant A_0, $(M, \phi_M) \in F^a$-Mod $(A^\dagger)$ un F-module surconvergent et $\mathcal{M} = M \otimes_{A^\dagger} \hat{A} \in F^a$-Mod $(\hat{A})$ le F-module convergent associé. Pour la méromorphie de $L^{(r)}_\alpha(X, M, t)$, et $L^{(r)}(X, M, t)$, il suffit de traiter le cas $r = 1$ et M libre [cf la preuve de (5.1.14)]. Par le théorème de spécialisation de Grothendieck on a vu en (5.1) que M (et donc $\mathcal{M}$) n'a qu'un nombre fini de «pentes de Newton» $\alpha \in \mathbb{Q}^+$. Quitte à passer à une extension finie totalement ramifiée de $\mathcal{V}$ on peut supposer que toutes les «pentes de Newton» de M sont des entiers $\alpha \in \mathbb{N}$.

Soit $N_0 \subset M$ comme dans le lemmme (5.3.2.1). Puisque

$$L(X, M, t) =: L(M, t) = L(N_0, t) \times L(M/N_0, t) = L(M/N_0, t) \ ,$$

car ϕ_{N_0} est nilpotent, on est ramené au cas où ϕ_M est injectif.

On peut alors appliquer le théorème d'isogénie de Katz (5.3.2.3) à notre $(M, \phi_M) \in F^a$-Modlib $(A^\dagger)$ à «pentes de Newton» des entiers $\alpha \in \mathbb{N}$; soit M' isogène à M comme dans ce théorème (5.3.2.3). Alors (M_K, ϕ_{M_K}) est isomorphe à $(M'_K, \phi_{M'_K})$, donc ils ont même fonction L

$$L(X, M, t) = L(X, M_K, t) = L(X, M'_K, t) = L(X, M', t)$$

et mêmes fonctions L_α

$$L_\alpha(M, t) = L_\alpha(M_K, t) = L_\alpha(M'_K, t) = L_\alpha(M', t) = L_\alpha(\mathcal{M}', t) = L(\mathcal{M}'_\alpha / \mathcal{M}'_{\alpha-1}, t) .$$

Pour la pente zéro, notons $\mathcal{M}'_0 \subset \mathcal{M}'$ le sous-F-module convergent unité de $\mathcal{M}'$; on a donc

$$L_0(M, t) = L_0(\mathcal{M}', t) = L(\mathcal{M}'_0, t) .$$

S'il existait un sous-F-module surconvergent unité M'_0 de M' tel que

$$M' \otimes_{A^\dagger} \hat{A} = \mathcal{M}'_0$$

on aurait

$$L_0(M, t) = L(M'_0, t) ;$$

la formule de traces de Monsky généralisée [Théorème (4.4)] prouverait alors que cette dernière fonction est p-adiquement méromorphe.**Toute la suite de cet article est consacrée à prouver qu'un tel M'_0 n'existe pas en général** ; pour ce faire on peut supposer que (M, ϕ_M) **est un F-module surconvergent ordinaire, i.e. dont le F-module convergent associé $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}})$ est ordinaire**.

5.4.2 La pente zéro : partie unité des F-modules convergents ordinaires

Au passage notons la caractérisation suivante de la partie unité d'un F-module convergent ordinaire :

Lemme (5.4.2.1). *Avec les notations de 5.3, soit $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}}) \in F^a$-Modlib $(\hat{A})$ un F-module libre convergent ordinaire, donc muni d'une filtration satisfaisant à (5.3.2.2). Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$ on note $\phi^n_{\mathcal{M}} : F^{n*}_{\hat{A}}(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$ l'itéré de $\phi_{\mathcal{M}}$. Alors, on a*

$$\mathcal{M}_0 = \bigcap_n \mathrm{Im}\{\phi^n_{\mathcal{M}} : F^{n*}_{\hat{A}}(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}\} .$$

Preuve du lemme. Puisque $\phi_{\mathcal{M}_0}$ est bijectif on a une inclusion évidente

$$\mathcal{M}_0 \subset \bigcap_n \mathrm{Im}\{\phi^n_{\mathcal{M}} : F^{n*}_{\hat{A}}(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}\} \ .$$

Pour prouver l'égalité il suffit d'après [Prop. (1.4)] d'établir la surjectivité en tout point fermé x de X, i.e., en utilisant les notations du §1, que l'on a un isomorphisme

$$\hat{\tau}(x)^*(\mathcal{M}_0) =: (\mathcal{M}_0)_x \simeq (\bigcap_n \mathrm{Im}\{\phi^n_{\mathcal{M}} : F^{n*}_{\hat{A}}(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}\})_x \ .$$

Or la composée des applications canoniques

$$(\mathcal{M}_0)_x \to (\bigcap_n \mathrm{Im}\ \phi^n_{\mathcal{M}})_x \to \bigcap_n (\mathrm{Im}\ \phi^n_{\mathcal{M}_x})$$

et des égalités

$$\bigcap_n (\mathrm{Im}\ \phi^n_{\mathcal{M}_x}) = (\mathcal{M}_x)_0 \ [\mathit{De\ell}\ 2; 1.3.2, (1.3.3.3)\ \mathit{et}\ \mathit{Rq}\ 1.2.5] \ ,$$

$$(\mathcal{M}_x)_0 = (\mathcal{M}_0)_x \ [K2]\ [W3; 4.12] \ ,$$

est l'identité de $(\mathcal{M}_0)_x$. De même la composée de l'application canonique

$$(\bigcap_n \mathrm{Im}\ \phi^n_{\mathcal{M}})_x \to \bigcap_n (\mathrm{Im}\ \phi^n_{\mathcal{M}_x}) \ ,$$

des égalités

$$\bigcap_n (\mathrm{Im}\ \phi^n_{\mathcal{M}_x}) = (\mathcal{M}_x)_0 = (\mathcal{M}_0)_x \ ,$$

et de l'application canonique

$$(\mathcal{M}_0)_x \to (\bigcap_n \mathrm{Im}\ \phi^n_{\mathcal{M}})_x$$

est l'identité de $(\bigcap_n \mathrm{Im}\ \phi^n_{\mathcal{M}})_x$. D'où le lemme. □

Lemme (5.4.2.2).*Avec les notations de 5.3, soit* $(M, \phi_M) \in F^a$*-Modlib* $(A^\dagger)$ *un* F*-module libre surconvergent ordinaire , i.e. dont le* F*-module convergent associé* $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}})$ *est ordinaire, donc muni d'une filtration satisfaisant à (5.3.2.2). Pour chaque entier* $n \in \mathbb{N}$ *on note*

$$\phi^n_{\mathcal{M}} : F^{n*}_{\hat{A}}(\mathcal{M}) \to \mathcal{M} \qquad [\mathit{resp.}\ \phi^n_M : F^{n*}_{A^\dagger}(M) \to M]$$

l'itéré de $\phi_{\mathcal{M}}$ [resp. ϕ_M]. On suppose de plus qu'il existe un sous-$A^\dagger$-module M_0 de M tel que $\mathcal{M}_0 = M_0 \otimes_{A^\dagger} \hat{A}$. Alors, on a des isomorphismes canoniques

$$M_0 = \mathcal{M}_0 \cap M \ ,$$

$$M_0 = \bigcap_n Im\{\phi_M^n : F_{A^\dagger}^{n*}(M) \to M\} \ ,$$

et M_0 est ϕ_M-stable, donc muni d'un Frobenius

$$\phi_{M_0} : F_{A^\dagger}^*(M_0) := M_0^\sigma \to M_0$$

défini par $\phi_{M_0} = \phi_{M|M_0^\sigma} = \phi_{\mathcal{M}|M_0^\sigma}$.

Preuve du lemme. Notons

$$M_0' = \mathcal{M}_0 \cap M \ ;$$

comme on a des inclusions évidentes

$$M_0 \subset M_0' \subset \mathcal{M}_0 \ ,$$

que le complété de M_0 est $\mathcal{M}_0$ et que M_0' est un $A^\dagger$-module de type fini, il en résulte une égalité

$$M_0 \otimes_{A^\dagger} \hat{A} = M_0' \otimes_{A^\dagger} \hat{A} \ ;$$

d'où, par fidèle platitude de $\hat{A}$ sur $A^\dagger$, la première égalité du lemme

$$M_0 = M_0' = \mathcal{M}_0 \cap M.$$

Notons

$$M^\sigma = F_{A^\dagger}^*(M) \ , \qquad M_0^\sigma = F_{A^\dagger}^*(M_0) \ ,$$

$$\mathcal{M}^\sigma = F_{\hat{A}}^*(\mathcal{M}) \ , \qquad \mathcal{M}_0^\sigma = F_{\hat{A}}^*(\mathcal{M}_0) \ ;$$

on a alors des isomorphismes

$$\mathcal{M}^\sigma \simeq M^\sigma \otimes_{A^\dagger} \hat{A} \simeq F_{A^\dagger}^*(\mathcal{M}) \ , \qquad \mathcal{M}_0^\sigma \simeq M_0^\sigma \otimes_{A^\dagger} \hat{A} \simeq F_{A^\dagger}^*(\mathcal{M}_0) \ .$$

Puisque $F_{A^\dagger}$ est plat, on en déduit des isomorphismes canoniques [Bour, AC I, §2, n$^{\text{o}}$ 6, prop. 6 et Rq. 1]

$$\mathcal{M}_0^\sigma \cap M^\sigma \simeq F_{A^\dagger}^*(\mathcal{M}_0) \cap F_{A^\dagger}^*(M) \simeq F_{A^\dagger}^*(\mathcal{M}_0 \cap M) = M_0^\sigma \subset \mathcal{M}^\sigma \ ;$$

d'où un morphisme de Frobenius

$$\phi_{M_0} : M_0^\sigma \to M_0$$

défini par $\phi_{M_0} = \phi_{\mathcal{M}_0|M_0^\sigma} = \phi_{M|M_0^\sigma} = \phi_{\mathcal{M}|M_0^\sigma}$, et ϕ_{M_0} est un isomorphisme car $\phi_{\mathcal{M}_0} = \phi_{M_0} \otimes_{A^\dagger} \hat{A}$ en est un.

Comme on a des inclusions évidentes

$$M_0 \subset \bigcap_n \mathrm{Im}\{\phi_M^n : F_{A^\dagger}^{n*}(M) \to M\} \subset \bigcap_n \mathrm{Im}\{\phi_{\mathcal{M}}^n : F_{\hat{A}}^{n*}(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}\} = \mathcal{M}_0 \ ,$$

que le complété de M_0 est $\mathcal{M}_0$ et que $\bigcap_n \mathrm{Im}\{\phi_M^n : F_{A^\dagger}^{n*}(M) \to M\}$ est un $A^\dagger$-module de type fini, il en résulte une égalité

$$M_0 \otimes_{A^\dagger} \hat{A} = \left(\bigcap_n \mathrm{Im}\{\phi_M^n : F_{A^\dagger}^{n*}(M) \to M\}\right) \otimes_{A^\dagger} \hat{A} \ ;$$

d'où, par fidèle platitude de $\hat{A}$ sur $A^\dagger$, la deuxième égalité du lemme

$$M_0 = \bigcap_n \mathrm{Im}\{\phi_M^n : F_{A^\dagger}^{n*}(M) \to M\}. \quad \square$$

Plus généralement que pour la seule partie de pente zéro, on a :

Proposition (5.4.2.3).

(a) *Avec les notations de 5.3, soient M un $A^\dagger$-module de type fini, $\mathcal{M} = M \otimes_{A^\dagger} \hat{A}$ et $\mathcal{N}$ un sous-$\hat{A}$-module de $\mathcal{M}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) il existe un sous-$A^\dagger$-module N de M tel que $\mathcal{N} = N \otimes_{A^\dagger} \hat{A}$.

(ii) $(\mathcal{N} \cap M) \otimes_{A^\dagger} \hat{A} \simeq \mathcal{N}$.

Si ces propriétés (i) et (ii) sont satisfaites, alors $N = \mathcal{N} \cap M$.

(b) *Soit $(M, \phi_M) \in F^a$-Mod $(A^\dagger)$ un F-module surconvergent, $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}})$ le F-module convergent associé $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}})$ et*

$$(\mathcal{N}, \phi_{\mathcal{N}}) \hookrightarrow (\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}})$$

un sous-F-module convergent.

On suppose de plus qu'il existe un sous-$A^\dagger$-module N de M tel que $\mathcal{N} = N \otimes_{A^\dagger} \hat{A}$. Alors, on a un isomorphisme canonique

$$N = \mathcal{N} \cap M \ ,$$

et N est ϕ_M-stable, donc muni d'un Frobenius

$$\phi_N : F_{A^\dagger}^*(N) := N^\sigma \to N$$

défini par $\phi_N = \phi_{\mathcal{N}|N^\sigma} = \phi_{M|N^\sigma} = \phi_{\mathcal{M}|N^\sigma}$. De plus $\phi_{\mathcal{N}}$ est un isomorphisme si et seulement si ϕ_N en est un.

(c) *Situation comme en (a) en supposant (i) et (ii) vérifiées : on suppose de plus que M, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ sont munis de connexions $\nabla_M, \nabla_{\mathcal{M}}, \nabla_{\mathcal{N}}$, telles que $\nabla_M = (\nabla_{\mathcal{M}})_{|M}$, $\nabla_{\mathcal{N}} = (\nabla_{\mathcal{M}})_{|\mathcal{N}}$. Alors N est muni d'une connexion définie par*

$$\nabla_N = (\nabla_{\mathcal{N}})_{|N} = (\nabla_M)_{|N} = (\nabla_{\mathcal{M}})_{|N} \ .$$

(d) *Supposons (b) et (c) vérifiées. Si ϕ_M et $\phi_{\mathcal{N}}$ sont horizontaux alors*

$$\phi_N : (N^\sigma, \nabla^\sigma) \to (N, \nabla)$$

est aussi un morphisme horizontal.

(e) *Les propriétés (a),(b),(c),(d) subsistent en remplaçant $A^\dagger$ par $A_K^\dagger$ et $\hat{A}$ par $\hat{A}_K$.*

Preuve de la proposition.
(a) Supposons (i) et notons

$$N' = \mathcal{N} \cap M \ ;$$

comme on a des inclusions évidentes

$$N \subset N' \subset \mathcal{N} \ ,$$

que le complété de N est $\mathcal{N}$ et que N' est un $A^\dagger$-module de type fini, il en résulte une égalité

$$N \otimes_{A^\dagger} \hat{A} = N' \otimes_{A^\dagger} \hat{A} \ ,$$

donc, par fidèle platitude de $\hat{A}$ sur $A^\dagger$, l'égalité $N = \mathcal{N} \cap M$. D'où (ii). L'implication réciproque est claire.

(b) D'après (a) on a

$$N = \mathcal{N} \cap M \ .$$

Notons

$$M^\sigma = F_{A^\dagger}^*(M) \ , \qquad N^\sigma = F_{A^\dagger}^*(N) \ ,$$

$$\mathcal{M}^\sigma = F_{\hat{A}}^*(\mathcal{M}) \ , \qquad \mathcal{N}^\sigma = F_{\hat{A}}^*(\mathcal{N}) \ ;$$

on a alors des isomorphismes

$$\mathcal{M}^\sigma \simeq M^\sigma \otimes_{A^\dagger} \hat{A} \simeq F_{A^\dagger}^*(\mathcal{M}) \ , \qquad \mathcal{N}^\sigma \simeq N^\sigma \otimes_{A^\dagger} \hat{A} \simeq F_{A^\dagger}^*(\mathcal{N}) \ .$$

Puisque $F_{A^\dagger}$ est plat, on déduit de [Bour, AC I, §2, n° 6, prop. 6 et Rq. 1] les isomorphismes du lemme suivant :

Lemme (5.4.2.4).

$$\mathcal{N}^\sigma \cap M^\sigma \simeq F^*_{A^\dagger}(\mathcal{N}) \cap F^*_{A^\dagger}(M) \simeq F^*_{A^\dagger}(\mathcal{N} \cap M) = N^\sigma \subset \mathcal{M}^\sigma \ .$$

D'où, par intersection à partir de $\phi_{\mathcal{N}}$ et ϕ_M, un morphisme de Frobenius

$$\phi_N : N^\sigma \to N$$

défini par $\phi_N = \phi_{\mathcal{N}|N^\sigma} = \phi_{M|N^\sigma} = \phi_{\mathcal{M}|N^\sigma}$.
Par fidèle platitude de $\hat{A}$ sur $A^\dagger$, ϕ_N est un isomorphisme si et seulement si $\phi_{\mathcal{N}} = \phi_N \otimes_{A^\dagger} \hat{A}$ en est un.

(c) On déduit de [Bour, AC I, §2, n° 6, prop. 6 et Rq. 1] le lemme suivant :

Lemme (5.4.2.5). *Avec les notations précédentes on a un isomorphisme*

$$N \otimes_{A^\dagger} \Omega^1_{A^\dagger} \simeq (\mathcal{N} \otimes_{\hat{A}} \Omega^1_{\hat{A}}) \cap (M \otimes_{A^\dagger} \Omega^1_{A^\dagger}) \ .$$

Grâce à ce lemme (5.4.2.5) les connexions

$$\nabla_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \to \mathcal{N} \otimes_{\hat{A}} \Omega^1_{\hat{A}}$$

et

$$\nabla_M : M \to M \otimes_{A^\dagger} \Omega^1_{A^\dagger}$$

permettent de définir encore par intersection, à la manière de [Et 4, §4], une connexion

$$\nabla_N : N \to N \otimes_{A^\dagger} \Omega^1_{A^\dagger}$$

telle que

$$\nabla_N = \nabla_{\mathcal{N}|N} = \nabla_{M|N} = \nabla_{\mathcal{M}|N} \ .$$

(d) Par l'injectivité des flèches

$$(N, \phi_N) \hookrightarrow (M, \phi_M)$$

et

$$(N, \phi_N) \hookrightarrow (\mathcal{N}, \phi_{\mathcal{N}})$$

la commutation de ϕ_N et ∇_N résulte de celle de ϕ_M, ∇_M d'une part et de celle de $\phi_{\mathcal{N}}, \nabla_{\mathcal{N}}$ d'autre part.

(e) Moyennant le lemme suivant, les preuves sont analogues.

Lemme (5.4.2.6). *En munissant $A_K^\dagger = A^\dagger \otimes_{\mathcal{V}} K$ (resp. $\hat{A}_K = \hat{A} \otimes_{\mathcal{V}} K$) de la norme extension naturelle de la norme p-adique de $A^\dagger$ (resp. $\hat{A}$), on note $\widehat{\left(A_K^\dagger\right)}$ le séparé complété de $A_K^\dagger$. Soit M un $A_K^\dagger$-module de type fini : on le munit de la norme p-adique et on note $\hat{M}$ son séparé complété pour cette topologie. Alors :*

(i) $\hat{A}_K$ est séparé et complet.

(ii) On a un isomorphisme isométrique $\widehat{\left(A_K^\dagger\right)} \simeq \hat{A}_K$.

(iii) On a un isomorphisme isométrique $\hat{M} \simeq \hat{A}_K \otimes_{A_K^\dagger} M$.

Preuve du lemme.

(i) Que $\hat{A}_K$ soit séparé est clair. Soit $(a_\nu)_\nu$ une suite de Cauchy dans $\hat{A}_K$: pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N_0 tel que, pour tous entiers naturels $\nu, \mu, \nu \geqslant N_0$, on ait $|a_{\nu+\mu} - a_\nu| < \varepsilon$; en particulier pour $0 < \varepsilon < 1$ on a $|a_{\nu+\mu} - a_\nu| \in \hat{A}$. Choisissons un entier $N(\nu)$ tel que $p^{N(\nu)} a_\nu \in \hat{A}$; puisque

$$|p^{N(\nu)} a_{\nu+\mu} - p^{N(\nu)} a_\nu| = \frac{1}{p^{N(\nu)}} |a_{\nu+\mu} - a_\nu| < \varepsilon$$

on en déduit que, pour tous entiers naturels $\nu, \mu, \nu \geqslant N_0$, on a $p^{N(\nu)} a_{\nu+\mu} \in \hat{A}$ et que, pour $\nu \geqslant N_0$, $(p^{N(\nu)} a_{\nu+\mu})_\mu$ est une suite de Cauchy de $\hat{A}$; notons $b \in \hat{A}$ la limite de cette suite. Il est alors clair que

$$\frac{b}{p^{N(\nu)}} = \lim_{n\to\infty} a_n \ .$$

(ii) D'après [B-G-R, §2.1.7, prop 4] et la complétude de $\hat{A}_K$ on a les isomorphismes isométriques suivants :

$$\widehat{\left(A_K^\dagger\right)} \simeq \widehat{A^\dagger} \hat{\otimes}_{\hat{\mathcal{V}}} \hat{K} = \hat{A} \hat{\otimes}_{\mathcal{V}} K \ ,$$

$$\hat{A}_K = \widehat{\hat{A}_K} \simeq \hat{A} \hat{\otimes}_{\mathcal{V}} K \ ;$$

d'où le (ii).

(iii) Notons $M' = \hat{A}_K \otimes_{A_k^\dagger} M$: c'est un $\hat{A}_K$-module de type fini que l'on peut décrire comme le quotient $M' = M''/N$ d'un module libre de type fini M'' par un sous-module N. D'après [B-G-R, §2.1.1 prop 3 et §2.1.5 prop 6]

M'' est complet, donc M' aussi [B-G-R, §2.1.2 prop 3]. Ainsi, compte tenu du (ii), on a $M' \simeq \hat{M}'$, i.e [B-G-R, §2.1.7 prop 4 et prop 6 (i)]

$$M' \simeq \hat{A}_K \hat{\otimes}_{\hat{A}_K} \hat{M} \simeq \hat{M} \ .$$

D'où le lemme. $\square$

On va en déduire le critère suivant de surconvergence pour les sous-objets des F-isocristaux, pour la définition desquels nous renvoyons à [B 2] :

Corollaire (5.4.2.7). *Soient X comme en (5.4.1), $(E, \phi_E) \in F\text{-}Isoc^\dagger(X/K)$ un F-isocristal surconvergent [B 2, (2.3.7)] et $(\mathcal{E}, \phi_\mathcal{E}) \in F\text{-}Isoc(X/K)$ le F-isocristal convergent associé : on note (M, ϕ_M, ∇_M) le $A_K^\dagger$-module associé à E par l'équivalence de catégories de Berthelot [B 2, (2.5.8)] et $(\mathcal{M}, \phi_\mathcal{M}, \nabla_\mathcal{M})$ le $\hat{A}_K$-module associé à $\mathcal{E}$ [Et 8]. Considérons un sous-objet*

$$(\mathcal{E}', \phi_{\mathcal{E}'}) \hookrightarrow (\mathcal{E}, \phi_\mathcal{E})$$

de $(\mathcal{E}, \phi_\mathcal{E})$ et notons

$$(\mathcal{N}, \phi_\mathcal{N}, \nabla_\mathcal{N}) \hookrightarrow (\mathcal{M}, \phi_\mathcal{M}, \nabla_\mathcal{M})$$

le $\hat{A}_K$-module associé à $\mathcal{E}'$ [Et 8]. Alors on a équivalence entre les propriétés suivantes :

(i) $(\mathcal{E}', \phi_{\mathcal{E}'})$ provient d'un objet $(E', \phi_{E'}) \in F\text{-}Isoc^\dagger(X/K)$ par le foncteur d'oubli [B 2, (2.3.9)]

$$F\text{-}Isoc^\dagger(X/K) \to F\text{-}Isoc(X/K) \ .$$

(ii) $(\mathcal{N} \cap M) \otimes_{A_K^\dagger} \hat{A}_K \simeq \mathcal{N}$.

Preuve du corollaire. Supposons (i) : il existe $E' \in F\text{-}Isoc^\dagger(X/K)$ avec pour image $\mathcal{E}'$ par le foncteur d'oubli

$$F\text{-}Isoc^\dagger(X/K) \to F\text{-}Isoc(X/K) \ .$$

L'injection $\mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{E}$ se relève alors par la pleine fidélité du foncteur d'oubli établie par Kedlaya [Ked 2, Theo 5.2.1] en une injection $E' \hookrightarrow E$: par l'équivalence de catégories de Berthelot [B 2, (2.5.8)] il en résulte une injection entre $A_K^\dagger$- modules projectifs de type fini $N \hookrightarrow M$ telle que

$$\mathcal{N} \simeq N \otimes_{A_K^\dagger} \hat{A}_K.$$

Le (ii) résulte alors de la proposition (5.4.2.3)(e ; propriété (a)).

Réciproquement supposons (ii) et posons $N = \mathcal{N} \cap M$. D'après [(5.4.2.3)(a) et (e)] N est muni d'une connexion ∇_N et d'un Frobenius ϕ_N qui est un isomorphisme horizontal : d'après l'équivalence de catégories de Berthelot [B 2, (2.5.8)] il existe un objet $(E', \phi_{E'}) \in F\text{-}Isoc^\dagger(X/K)$ associé à (N, ϕ_N, ∇_N). Compte tenu de l'isomorphisme

$$(N, \phi_N, \nabla_N) \otimes_{A_K^\dagger} \hat{A}_K \simeq (\mathcal{N}, \phi_{\mathcal{N}}, \nabla_{\mathcal{N}}) \ ,$$

$(\mathcal{E}', \phi_{\mathcal{E}'})$ provient de $(E', \phi_{E'}) \in F\text{-}Isoc^\dagger(X/K)$ par le foncteur d'oubli. D'où le corollaire. □

5.4.3 Premier contre-exemple : les courbes elliptiques de Legendre

Soient $k = \mathbb{F}_p$ le corps fini à p éléments, $\overline{k}$ une clôture algébrique de k, $\lambda \in \overline{k}$, $\lambda \neq 0, 1, k(\lambda) = \mathbb{F}_{q_\lambda}$ le corps résiduel de λ, et X_λ la courbe elliptique d'équation affine $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$.

Si $p \neq 2$, soit H_p le polynôme suivant

$$H_p(\lambda) = \sum_{i=0}^{i=\frac{p-1}{2}} \binom{\frac{p-1}{2}}{i}^2 \lambda^i \ .$$

Alors par définition on a
(i) X_λ est supersingulière $\iff$ $H_p(\lambda) = 0$
(ii) X_λ est ordinaire $\iff$ $H_p(\lambda) \neq 0$.
Sur cette caractérisation on constate que les courbes elliptiques ordinaires sont les plus nombreuses ; pour $p > 2$ donné il y a au plus [p/12]+2 courbes elliptiques supersingulières (à isomorphisme près).

La fonction zêta de X_λ s'écrit :

$$Z(X_\lambda/k(\lambda), t) = \frac{(1-\alpha_\lambda t)(1-\beta_\lambda t)}{(1-t)(1-qt)} = \frac{det(1-tF; H^1_{cris}(X_\lambda/W_\lambda))}{(1-t)(1-qt)} \ ,$$

où W_λ est l'anneau $W(k(\lambda))$ des vecteurs de Witt de $k(\lambda)$ et α_λ , β_λ sont des entiers algébriques éléments d'une extension finie K_λ du corps des fractions de W_λ tels que $\beta_\lambda = q_\lambda/\alpha_\lambda$. Soit v l'extension à K_λ de la valuation p-adique telle que $v(q_\lambda) = 1$. Il n'y a alors que deux possibilités :

(i) ou bien $v(\alpha_\lambda) = v(\beta_\lambda) = 1/2$, auquel cas X_λ est supersingulière,
(ii) ou bien $v(\alpha_\lambda) = 0, v(\beta_\lambda) = 1$, auquel cas X_λ est ordinaire.

Dans le cas ordinaire (qui est "le plus courant") on s'intéresse à voir comment α_λ varie avec λ : pour ça on considère la famille des courbes elliptiques de Legendre $f : X \to S$ sur le $\mathbb{F}_p$-schéma lisse $S = Spec(\mathbb{F}_p[\lambda][\frac{1}{\lambda(1-\lambda)H_p(\lambda)}])$ et les fonctions génératrices

$$L(R^1 f_{\mathrm{cris}*}(\mathcal{O}_{X/W}), t) := \prod_{s \in |S|} [(1 - \beta_s t^{deg\ s})(1 - \alpha_s t^{deg\ s})]^{-1} ,$$

$$L_0(R^1 f_{\mathrm{cris}*}(\mathcal{O}_{X/W}), t) = L(R^1 f_{\text{ét}*}(\mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{X/W}, t) = \prod_{s \in |S|} (1 - \alpha_s t^{deg\ s})^{-1}$$

dans lesquelles

$$deg\ s = [k(s) : \mathbb{F}_p] .$$

Par [B-B-M] on sait que $R^1 f_{\mathrm{cris}*}(\mathcal{O}_{X/W})$ est un F-cristal localement libre de rang 2 et $R^1 f_{\text{ét}*}(\mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{X/W}$ est son sous-F-cristal unité. Le F-isocristal convergent associé à $R^1 f_{\mathrm{cris}*}(\mathcal{O}_{X/W})$ par la construction de Berthelot [B 2, (2.4.2)] n'est autre que $\mathcal{E} := R^1 f_{conv*}(\mathcal{O}_{X/\mathbb{Q}_p})$ et ce dernier provient en fait du F-isocristal surconvergent $E := R^1 f_{rig*}(\mathcal{O}_{X/\mathbb{Q}_p})$ [Et 4, théorème 7] : il résulte alors de [E-LS 1] et de [Ked 1] que la fonction $L(R^1 f_{\mathrm{cris}*}(\mathcal{O}_{X/W}), t)$ est rationnelle.
D'autre part on sait depuis Dwork [Dw 3] que la fonction $L_0(R^1 f_{\mathrm{cris}*}(\mathcal{O}_{X/W}), t)$ est méromorphe.

Notons $A_0 = \mathbb{F}_p[\lambda][\frac{1}{\lambda(1-\lambda)H_p(\lambda)}], A = \mathbb{Z}_p[\lambda][\frac{1}{\lambda(1-\lambda)H_p(\lambda)}], A^\dagger$ le complété faible de A, $\hat{A}$ le complété de A, $A^\dagger_{\mathbb{Q}_p} = A^\dagger \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$, $\hat{A}_{\mathbb{Q}_p} = \hat{A} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$, $F_{A^\dagger} : A^\dagger \to A^\dagger$ un relèvement du Frobenius de A_0 au-dessus du Frobenius σ de $\mathbb{Z}_p$, $F_{\hat{A}} = F_{A^\dagger} \otimes_{A^\dagger} \hat{A}$ et $F_{A^\dagger_{\mathbb{Q}_p}} = F_{A^\dagger} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$, $F_{\hat{A}_{\mathbb{Q}_p}} = F_{\hat{A}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$.
Rappelons que $F_{A^\dagger}$ est automatiquement fini et fidèlement plat [Et 3, théo 17], et que la donnée d'un relèvement $F_{\hat{A}} : \hat{A} \to \hat{A}$ du Frobenius de A_0 au-dessus du Frobenius σ de $\mathbb{Z}_p$ est équivalente [Et 6, cor. (3.1.4)] à la donnée d'un $F_{A^\dagger}$ tel que $F_{\hat{A}} = F_{A^\dagger} \otimes_{A^\dagger} \hat{A}$.
Puisque S est un $\mathbb{F}_p$-schéma affine et lisse, la donnée du F-isocristal surconvergent $E = R^1 f_{rig*}(\mathcal{O}_{X/\mathbb{Q}_p})$ est équivalente [B 2, (2.5.8)] à la donnée d'un $A^\dagger_{\mathbb{Q}_p}$-module projectif de type fini $M_{\mathbb{Q}_p}$, muni d'une connexion intégrable $\nabla_{M_{\mathbb{Q}_p}}$ et d'un isomorphisme horizontal $\phi_{M_{\mathbb{Q}_p}} : F^*_{A^\dagger_{\mathbb{Q}_p}}(M_{\mathbb{Q}_p}) \to M_{\mathbb{Q}_p}$. Soit

$(\mathcal{M}_{\mathbb{Q}_p}, \phi_{\mathcal{M}_{\mathbb{Q}_p}}, \nabla_{\mathcal{M}_{\mathbb{Q}_p}})$ le $\hat{A}_{\mathbb{Q}_p}$-module déduit de $(M_{\mathbb{Q}_p}, \phi_{M_{\mathbb{Q}_p}}, \nabla_{M_{\mathbb{Q}_p}})$ par le changement de base $A^\dagger_{\mathbb{Q}_p} \to \hat{A}_{\mathbb{Q}_p}$: $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}_p}$ n'est autre que le $\hat{A}_{\mathbb{Q}_p}$-module associé dans [Et 8] au F-isocristal convergent correspondant à $R^1 f_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X/W})$.

Il se trouve aussi que la donnée de $R^1 f_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X/W})$ fournit d'après Katz [K 2, § II] un $\hat{A}$-module projectif de type fini $\mathcal{M}$ muni d'une connexion intégrable $\nabla_{\mathcal{M}}$ et d'une isogénie $\phi_{\mathcal{M}} : F^*_{\hat{A}}(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$ commutant à la connexion, et l'on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{M}_{\mathbb{Q}_p} = \mathcal{M} \otimes_{\hat{A}} \hat{A}_{\mathbb{Q}_p} \ .$$

Il est à noter que le Frobenius $\phi_{\mathcal{M}}$ dépend du relèvement $F_{\hat{A}}$ du Frobenius de A_0 : pour deux tels relèvements $F_{1\hat{A}}$ et $F_{2\hat{A}}$ les Frobenius $\phi_{1\mathcal{M}}$, $\phi_{2\mathcal{M}}$ correspondants sont reliés par un isomorphisme $\chi(F_1, F_2)$ provenant de la connexion et qui rend commutatif le diagramme suivant [K 1, §(1.3)] :

$$\begin{tikzcd} F^*_{1\hat{A}}(\mathcal{M}) \arrow[r, "\phi_{1\mathcal{M}}"] \arrow[d, "\chi(F_1,F_2)"', "\simeq"] & \mathcal{M} \\ F^*_{2\hat{A}}(\mathcal{M}) \arrow[ur, "\phi_{2\mathcal{M}}"'] & \end{tikzcd} \ .$$

Précisons la provenance de $\mathcal{M}$: soit $h : \mathcal{X} \to \mathcal{S} = \mathit{Spec}\ A$ le relèvement évident de f au-dessus de $\mathbb{Z}_p$ et $h^\dagger : \mathcal{X}^\dagger \to \mathcal{S}^\dagger := \mathit{Spec}\ A^\dagger$ [resp. $\hat{h} : \hat{\mathcal{X}} \to \hat{\mathcal{S}} := \mathit{Spec}\ \hat{A}$] l'image inverse de h par le changement de base de A à $A^\dagger$ [resp. de A à $\hat{A}$] ; alors $\mathcal{M}$ est le H^1*de Rham* de $\hat{h}$ [K 1, § 8] et $\mathcal{M}$ est un $\hat{A}$-module libre de rang 2 sur ω et ω' où

ω est la classe de la différentielle de première espèce dx/y ,

$\omega' = \nabla(d/d\lambda)(\omega)$.

La filtration de Hodge est spécifiée par

$$Fil^1\mathcal{M} = \hat{A}\omega \subset \mathcal{M} \ .$$

La donnée de $\mathcal{M}$ et $M_{\mathbb{Q}_p}$ fournit d'après [F-R, §4] un $A^\dagger$-module projectif de type fini $M = M_{\mathbb{Q}_p} \cap \mathcal{M}$ et l'on a des isomorphismes canoniques

$$\mathcal{M} = M \otimes_{A^\dagger} \hat{A} \ , \qquad M_{\mathbb{Q}_p} = M \otimes_{A^\dagger} A^\dagger_{\mathbb{Q}_p} \ .$$

Notons

$$M^\sigma = F^*_{A^\dagger}(M) \ , \qquad M^\sigma_{\mathbb{Q}_p} = F^*_{A^\dagger_{\mathbb{Q}_p}}(M_{\mathbb{Q}_p}) \ ,$$

$$\mathcal{M}^\sigma = F^*_{\hat{A}}(\mathcal{M}) \ , \qquad \mathcal{M}^\sigma_{\mathbb{Q}_p} = F^*_{\hat{A}_{\mathbb{Q}_p}}(\mathcal{M}_{\mathbb{Q}_p}) \ ;$$

on a alors des isomorphismes

$$\mathcal{M}^\sigma \simeq M^\sigma \otimes_{A^\dagger} \hat{A} \ , \qquad (M_{\mathbb{Q}_p})^\sigma \simeq M^\sigma \otimes_{A^\dagger} A^\dagger_{\mathbb{Q}_p} = (M^\sigma)_{\mathbb{Q}_p} \ ,$$

$$(\mathcal{M}_{\mathbb{Q}_p})^\sigma \simeq (\mathcal{M}^\sigma)_{\mathbb{Q}_p} \simeq (M_{\mathbb{Q}_p})^\sigma \otimes_{A^\dagger_{\mathbb{Q}_p}} \hat{A}_{\mathbb{Q}_p} \simeq M^\sigma \otimes_{A^\dagger} \hat{A}_{\mathbb{Q}_p} \ .$$

Lemme (5.4.3.1). *Avec les notations précédentes on a un isomorphisme*

$$M^\sigma \simeq \mathcal{M}^\sigma \cap M^\sigma_{\mathbb{Q}_p} \subset \mathcal{M}^\sigma_{\mathbb{Q}_p} \ .$$

Preuve du lemme. Le $A^\dagger$-module M^σ est plat pour le $A^\dagger$-module $\hat{A}_{\mathbb{Q}_p}$ [Bour, AC I, §2, n° 2, déf 1], car M^σ est un $A^\dagger$-module plat, puisque $F_{A^\dagger}$ est plat et M est projectif de type fini sur $A^\dagger$. Donc on a un isomorphisme canonique [Bour, AC I, §2, n° 6, prop. 6 et Rq 1] et [Et 4, cor de prop.2]

$$\mathcal{M}^\sigma \cap (M_{\mathbb{Q}_p})^\sigma = (M^\sigma \otimes_{A^\dagger} \hat{A}) \cap (M^\sigma \otimes_{A^\dagger} A^\dagger_{\mathbb{Q}_p}) \simeq M^\sigma \otimes_{A^\dagger} (\hat{A} \cap A^\dagger_{\mathbb{Q}_p}) = M^\sigma \ . \ \square$$

Les Frobenius $\phi_{\mathcal{M}} : F^*_{\hat{A}}(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$ et $\phi_{M_{\mathbb{Q}_p}} : F^*_{A^\dagger_{\mathbb{Q}_p}}(M_{\mathbb{Q}_p}) \to M_{\mathbb{Q}_p}$ permettent alors, grâce au lemme (5.4.3.1), de définir par intersection, à la manière de [Et 4, cor de prop. 7], un morphisme de Frobenius

$$\phi_M : M^\sigma \to M$$

tel que $\phi_M = \phi_{\mathcal{M}|M^\sigma} = \phi_{M_{\mathbb{Q}_p}|M^\sigma} = \phi_{\mathcal{M}_{\mathbb{Q}_p}|M^\sigma}$.

De la même façon on établit le lemme suivant :

Lemme (5.4.3.2). *Avec les notations précédentes on a un isomorphisme*

$$M \otimes_{A^\dagger} \Omega^1_{A^\dagger} \simeq (\mathcal{M} \otimes_{\hat{A}} \Omega^1_{\hat{A}}) \cap (M_{\mathbb{Q}_p} \otimes_{A^\dagger_{\mathbb{Q}_p}} \Omega^1_{A^\dagger_{\mathbb{Q}_p}}) \ .$$

Grâce à ce lemme (5.4.3.2) les connexions

$$\nabla_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{M} \otimes_{\hat{A}} \Omega^1_{\hat{A}}$$

et

$$\nabla_{M_{\mathbb{Q}_p}} : M_{\mathbb{Q}_p} \to M_{\mathbb{Q}_p} \otimes_{A^\dagger_{\mathbb{Q}_p}} \Omega^1_{A^\dagger_{\mathbb{Q}_p}}$$

permettent de définir encore par intersection, à la manière de [Et 4, §4], une connexion

$$\nabla_M : M \to M \otimes_{A^\dagger} \Omega^1_{A^\dagger}$$

telle que

$$\nabla_M = \nabla_{\mathcal{M}|M} = \nabla_{M_{\mathbb{Q}_p}|M} = \nabla_{\mathcal{M}_{\mathbb{Q}_p}|M} \ .$$

On a vu ci-dessus que $\nabla_{M_{\mathbb{Q}_p}}$ et $\phi_{M_{\mathbb{Q}_p}}$ commutent, il en donc de même pour ∇_M et ϕ_M.

Le sous-F-cristal unité $R^1 f_{\text{ét}*}(\mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{X/W}$ de $R^1 f_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X/W})$ fournit de même par Katz [K 2, §II] un $\hat{A}$-module projectif de type fini $\mathcal{M}_0$ muni d'une connexion intégrable $\nabla_{\mathcal{M}_0}$ et d'une isogénie $\phi_{\mathcal{M}_0} : F^*_{\hat{A}}(\mathcal{M}_0) \to \mathcal{M}_0$ commutant à la connexion ; $\mathcal{M}_0$ est aussi le sous-module de $\mathcal{M}$ défini dans le lemme (5.4.2.1) ci-dessus . En fait $\mathcal{M}_0$ est libre de rang un sur $\hat{A}$ [K 1, §8], [vdP, (7.12)] avec pour base $u = \beta\omega - \lambda(1-\lambda)\omega'$, $\beta \in \hat{A}$, telle que $\phi_{\mathcal{M}_0}(u) = \phi_{\mathcal{M}}(u) = u$. La filtration

$$0 \subset \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M} \tag{5.4.3.3}$$

en sous-modules $\phi_{\mathcal{M}}$-stables fait de $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}})$ un F-module ordinaire [K 1] et l'on a un isomorphisme de $\hat{A}$-modules

$$\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}_0 \oplus Fil^1\ \mathcal{M} \ . \tag{5.4.3.4}$$

En procédant à une étude locale de la famille de Legendre [Deℓ 2, §2.1.4], [K 1, §7] il se trouve que $\mathcal{M}_0$ et $Fil^1\ \mathcal{M}$ sont en dualité par la dualité de Poincaré qui respecte l'action du Frobenius [loc. cit.] : pour les «relèvements excellents»du Frobenius qui induisent une action sur $Fil^1\ \mathcal{M}$ [cf (5.2)], la dualité de Poincaré permet d'en déduire l'action du Frobenius sur la partie unité $\mathcal{M}_0$.

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer notre premier contre-exemple promis en 5.1 :

Théorème (5.4.3.5). *Avec les notations précédentes la filtration (5.4.3.3) ne se relève pas en une filtration de M, plus précisément il n'existe pas de sous-$A^\dagger$-module M_0 de M tel que l'on ait un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{M}_0 = M_0 \otimes_{A^\dagger} \hat{A} \ .$$

Preuve du théorème. Par l'absurde supposons l'existence d'un sous-$A^\dagger$-module M_0 de M vérifiant un isomorphisme canonique

$$\mathcal{M}_0 = M_0 \otimes_{A^\dagger} \hat{A} \ .$$

Notons

$$M_0' = \mathcal{M}_0 \cap M \ ;$$

comme on a les inclusions évidentes

$$M_0 \subset M_0' \subset \mathcal{M}_0 \ ,$$

que le complété de M_0 est $\mathcal{M}_0$ et que M_0' est un $A^\dagger$-module de type fini, il en résulte une égalité

$$M_0 \otimes_{A^\dagger} \hat{A} = M_0' \otimes_{A^\dagger} \hat{A} \ ,$$

d'où l'égalité

$$M_0 = M_0' = \mathcal{M}_0 \cap M.$$

Comme pour le lemme (5.4.3.1) on établit l'isomorphisme

$$M_0^\sigma \simeq \mathcal{M}_0^\sigma \cap M^\sigma \subset \mathcal{M}^\sigma \ ;$$

d'où un morphisme de Frobenius

$$\phi_{M_0} : M_0^\sigma \to M_0$$

défini par $\phi_{M_0} = \phi_{\mathcal{M}_0|M_0^\sigma} = \phi_{M|M_0^\sigma} = \phi_{\mathcal{M}|M_0^\sigma}$.

Par le lemme (5.4.2.5) on a un isomorphisme

$$M_0 \otimes_{A^\dagger} \Omega^1_{A^\dagger} \simeq (\mathcal{M}_0 \otimes_{\hat{A}} \Omega^1_{\hat{A}}) \cap (M \otimes_{A^\dagger} \Omega^1_{A^\dagger}) \ ;$$

d'où une connexion

$$\nabla_{M_0} : M_0 \to M_0 \otimes_{A^\dagger} \Omega^1_{A^\dagger}$$

définie par

$$\nabla_{M_0} = \nabla_{\mathcal{M}_0|M_0} = \nabla_{M|M_0} = \nabla_{\mathcal{M}|M_0} \ .$$

Comme ∇_M et ϕ_M commutent, il en est de même de ∇_{M_0} et ϕ_{M_0} et de $\nabla_{M_{0\mathbb{Q}_p}}$ et $\phi_{M_{0\mathbb{Q}_p}}$: par l'équivalence de catégories de Berthelot [B 2, (2.5.8)] le sous-F-isocristal convergent $\mathcal{E}_0$ du F-isocristal surconvergent $R^1 f_{rig*}(\mathcal{O}_{X/\mathbb{Q}_p})$ correspondant à $R^1 f_{\text{ét}*}(\mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{X/W}$ serait surconvergent, i.e. serait dans l'image essentielle du foncteur d'oubli [B 2, (2.3.8)]

$$F\text{-}Isoc^\dagger(S/\mathbb{Q}_p) \to F\text{-}Isoc(S/\mathbb{Q}_p) \ .$$

Nous allons prouver qu'il n'en est rien.
Compte tenu de l'isomorphisme $\mathcal{M}_0 = M_0 \otimes_{A^\dagger} \hat{A}$, il existe

$\mu \in \hat{A}^\times :=$ { éléments inversibles de $\hat{A}$} tel que

$$\mu u = \mu\beta\omega - \mu\lambda(1-\lambda)\omega' \in M_0\,;$$

puisque $\lambda(1-\lambda) \in A^{\dagger\times} := \{$ éléments inversibles de $A^\dagger\}$, on en déduit que $\mu \in A^{\dagger\times}$, donc aussi $\beta \in A^{\dagger\times}$. Au final ceci prouverait que le générateur u de $\mathcal{M}_0$ comme $\hat{A}$-module serait aussi générateur de M_0 comme $A^\dagger$-module : on aurait alors (et ceci quel que soit le relèvement $F_{\hat{A}}$ du Frobenius de A_0)

(5.4.3.6) $\quad \phi_{M_0}(u) = \phi_{\mathcal{M}}(u) \ \in M_0 \subset \mathcal{M}_0,$

(5.4.3.7) $\quad \nabla_{M_0}(d/d\lambda)(u) = \nabla_{\mathcal{M}}(d/\lambda)(u) \ \in M_0 \subset \mathcal{M}_0\ .$

Arrivé à ce stade du raisonnement nous allons à présent choisir pour relèvement $F_{\hat{A}}$ le relèvement canonique φ_{can} (relèvement excellent du Frobenius dans la terminologie de Dwork) et nous noterons

$$\phi_{\mathcal{M}}(\varphi_{can}) : \varphi_{can}^{*}(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$$

le Frobenius de $\mathcal{M}$ pour insister sur sa dépendance en φ_{can}. D'après [vdP, (7.14), (7.16)], [Dw 4] on a

(5.4.3.8)
$$\phi_{\mathcal{M}}(\varphi_{can})(u) = \xi u\ , \quad \xi = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{\alpha(\lambda)}{\alpha(\varphi_{can}(\lambda))} \in A^\dagger$$

où α est la fonction hypergéométrique

$$\alpha(\lambda) := F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\lambda) := \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{(\frac{1}{2})_i}{i!}\right)^2 \lambda^i\ , \qquad \left(\frac{1}{2}\right)_i := \prod_{j=0}^{j=i-1} \left(\frac{1}{2}+j\right)\ ,$$

(5.4.3.9)
$$\nabla_{\mathcal{M}}(d/\lambda)(u) = \eta u\ , \quad \eta = -\frac{\alpha'(\lambda)}{\alpha(\lambda)} \in \hat{A} \setminus A^\dagger\ .$$

La relation (5.4.3.9) contredit (5.4.3.7). Ceci achève la preuve du théorème (5.4.3.5). $\square$

Chemin faisant nous avons en partie prouvé le corollaire suivant :

Corollaire (5.4.3.10). *Avec les notations de (5.4.3) le F-isocristal convergent associé à $R^1 f_{cris*}(\mathcal{O}_{X/W})$ par la construction de Berthelot [B 2, (2.4.2)] n'est autre que $\mathcal{E} := R^1 f_{conv*}(\mathcal{O}_{X/\mathbb{Q}_p})$ et ce dernier provient du F-isocristal surconvergent $E := R^1 f_{rig*}(\mathcal{O}_{X/\mathbb{Q}_p})$ par le foncteur d'oubli [B 2, (2.3.8)]*

$$F\text{-}Isoc^\dagger(S/\mathbb{Q}_p) \to F\text{-}Isoc(S/\mathbb{Q}_p)\ .$$

Le sous-F-isocristal convergent unité $\mathcal{E}_0$ de $\mathcal{E}$ associé à $R^1 f_{\acute{e}t*}(\mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{X/W}$ n'est pas surconvergent, i.e. il n'est pas dans l'image essentielle du foncteur d'oubli

$$F\text{-}Isoc^\dagger(S/\mathbb{Q}_p) \to F\text{-}Isoc(S/\mathbb{Q}_p)$$

bien que $\mathcal{E}$ lui-même soit dans l'image de ce foncteur d'oubli.

Preuve du corollaire. Supposons par l'absurde qu'il existe $E_0 \in F\text{-}Isoc^\dagger(S/\mathbb{Q}_p)$ avec pour image $\mathcal{E}_0$ par le foncteur d'oubli

$$F\text{-}Isoc^\dagger(S/\mathbb{Q}_p) \to F\text{-}Isoc(S/\mathbb{Q}_p)\ .$$

L'injection $\mathcal{E}_0 \hookrightarrow \mathcal{E}$ se relève alors par la pleine fidélité du foncteur d'oubli établie par Kedlaya [Ked 2, Theo 5.2.1] en une injection $E_0 \hookrightarrow E$: par l'équivalence de catégories de Berthelot [B 2, (2.5.8)] il en résulte une injection entre $A^\dagger_{\mathbb{Q}_p}$- modules projectifs de type fini $M_{0\mathbb{Q}_p} \hookrightarrow M_{\mathbb{Q}_p}$; avec les notations utilisées dans la preuve du théorème (5.4.3.5) posons

$$M_0 := \mathcal{M}_0 \cap M_{0\mathbb{Q}_p}\ .$$

Grâce à [F-R, §4] on en déduit une injection $M_0 \hookrightarrow M$ telle que

$$\mathcal{M}_0 = M_0 \otimes_{A^\dagger} \hat{A}\ , \quad M_{0\mathbb{Q}_p} = M_0 \otimes_{A^\dagger} A^\dagger_{\mathbb{Q}_p}\ ;$$

ce qui est impossible d'après le théorème (5.4.3.5). D'où le corollaire. □

Remarques (5.4.3.11). Le corollaire (5.4.3.10) et les relations (5.4.3.8)(5.4.3.9) peuvent se paraphraser en disant deux choses :
(i) Dans la base u de $\mathcal{M}_0$, $\phi_{\mathcal{M}_0}(\varphi_{can})$ est surconvergent et $\nabla_{\mathcal{M}_0}$ ne l'est pas : le corollaire (5.4.3.10) nous dit qu'on ne peut pas faire mieux, i.e. qu'il n'existe aucun relèvement $F_{\hat{A}}$ du Frobenius de A_0 ni aucune base de $\mathcal{M}_0$ dans laquelle à la fois $\phi_{\mathcal{M}_0}(F_{\hat{A}})$ et $\nabla_{\mathcal{M}_0}$ soient surconvergents.
(ii) Bien que $\mathcal{M}_0$ soit surconvergent au sens de Dwork (i.e. existence d'un Frobenius $F_{\hat{A}}$ et d'une base de $\mathcal{M}_0$ tels que la matrice de $\phi_{\mathcal{M}_0}$ soit surconvergente, c'est-à-dire à coefficients dans $A^\dagger$: avec les notations ci-dessus la matrice de $\phi_{1\mathcal{M}}$ peut être surconvergente et pas celle de $\phi_{1\mathcal{M}}$, la différence provenant de la matrice de $\chi(F_1, F_2)$),
la filtration par les pentes (5.4.3.3) $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ ne se relève pas en une filtration analogue de M, sinon $\mathcal{M}_0$ serait surconvergent au sens de Berthelot, ce qui n'est pas le cas.
Cette surconvergence au sens de Dwork de $\mathcal{M}_0$ permet cependant de lui appliquer la formule des traces de Monsky et d'en déduire la méromorphie de la fonction $L(X, \mathcal{M}_0, t)$.

5.4.4 Deuxième contre-exemple : les courbes modulaires

Soient $k = \mathbb{F}_p, N \geqslant 3$ un entier premier à p, $Y_0(N)$ la courbe modulaire affine lisse sur $\mathbb{Z}_p$ espace de modules de courbes elliptiques avec structure de niveau de type $\Gamma_0(N)$. On note $A \to Y_0(N)$ la courbe elliptique universelle. Soient $Y_0(N)_k$ la fibre spéciale de $Y_0(N)$, $X \subset Y_0(N)_k$ l'ouvert qui paramétrise les courbes elliptiques ordinaires [F-C,V, §7, p.192] et $U \subset Y_0(N)$ un sous-schéma ouvert de fibre spéciale X. On désigne par $\mathcal{X}$ le complété formel de U le long de X : c'est un $\mathbb{Z}_p$-schéma formel indépendant du choix de U. Considérons le problème de module $\mathcal{A}_N^{ord}$ qui associe à tout $\mathbb{Z}_p$-schéma localement noethérien S dans lequel p est localement nilpotent, l'ensemble des classes d'isomorphismes

$$\mathcal{A}_N^{ord}(S) = \{(B, \delta_N)\}/\simeq$$

où B est un S-schéma abélien de dimension relative 1 muni d'une polarisation principale tel que toutes les fibres géométriques de $B \to S$ sont des courbes elliptiques ordinaires et δ_N est une structure de niveau N. Alors $\mathcal{A}_N^{ord}$ est indreprésentable par $\mathcal{X}$ [A-M, §8]. La courbe elliptique formelle universelle $\mathcal{C} \to \mathcal{X}$ est la complétée formelle de l'image inverse de $A \to Y_0(N)$ par la flèche $U \hookrightarrow Y_0(N)$; de plus $\mathcal{C} \to \mathcal{X}$ relève la courbe elliptique ordinaire universelle $f : C \to X$. Ainsi $E = R^1 f_{rig*}(C/\mathcal{X})$ est un F-isocristal surconvergent sur X de rang 2 [B 2, (2.3.8)(iii)] [Et 4, théo 7] ; notons $\mathcal{E}$ le F-isocristal convergent associé à E par le foncteur d'oubli

$$F\text{-Isoc}^\dagger(X/\mathbb{Q}_p) \to F\text{-Isoc}(X/\mathbb{Q}_p) .$$

Le sous-F-isocristal unité $\mathcal{E}_0$ de $\mathcal{E}$ est l'isocristal associé, par la construction de Berthelot [B 2, 2.4], au F-cristal unité de rang 1 $R^1 f_{\text{ét}*}(\mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{X/\mathbb{Z}_p}$: ce F-cristal unité correspond à une représentation [K 4]

$$\rho : \Pi_1(X, \overline{x}) \to \mathbb{Z}_p^\times$$

où $\overline{x}$ est un point géométrique de X fixé. D'après un théorème de Igusa [Ig], [K 4, 4.3] l'image par ρ du groupe d'inertie en chaque point supersingulier est égale à $\mathbb{Z}_p^\times$ tout entier : en particulier ρ n'est pas à monodromie locale finie [C, §3], donc d'après Crew [C, theo 4.12] $\mathcal{E}_0$ ne provient pas d'un F-isocristal surconvergent par le foncteur d'oubli ci-dessus. Cependant, d'après un théorème de Brinon-Mokrane [Bri-Mo, théo 1.1], le «relèvement canonique» $\phi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ du Frobenius de X, issu de la théorie des sous-groupes canoniques de Abbes-Mokrane [A-M], fournit un Frobenius surconvergent

$$\Phi_{\mathcal{E}_0} : \phi^* \mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}_0 .$$

Ainsi les analogues du théorème (5.4.3.5), du corollaire (5.4.3.10) et des remarques (5.4.3.11) s'appliquent intégralement à ce nouvel exemple : en particulier
(i) $\mathcal{E}_0$ est surconvergent au sens de Dwork mais pas au sens de Berthelot.
(ii) malgré la surconvergence de $\mathcal{E}_0$ au sens de Dwork la filtration $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$ ne se relève pas en une filtration analogue de E.

Références

[A-M] A. Abbes, A. Mokrane : *Sous-groupes canoniques et cycles évanescents p-adiques pour les variétés abéliennes*, Publ. Math. IHES 99 (2004), 117-162.

[A] Y. Amice : *Les nombres p-adiques*, Presses Universitaires de France (1975).

[B 1] P. Berthelot : *Cohomologie rigide et théorie de Dwork : le cas des sommes exponentielles*, Astérisque n° 119-120 (1984), 17-49.

[B 2] P. Berthelot : *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres*, Prépublication 93-03 de Rennes (1996).

[B-B-M] P. Berthelot , L. Breen, W. Messing : *Théorie de Dieudonné cristalline II*, Lecture Notes in Math. 930, Springer (1982).

[B-M] P. Berthelot, W. Messing : *Théorie de Dieudonné cristalline III : théorèmes d'équivalence et de pleine fidélité*, The Grothendieck Festschrift, vol. 1, Progress in Math. 86, Birkhaüser (1990).

[B-G-R] S. Bosch, U. Güntzer, R. Remmert : *Non-archimedean analysis*, Grundlehren der Math. Wissenschaften 261, Springer Verlag (1984).

[Bour] N. Bourbaki : *Algèbre* [A] chap. I à VII ; *Algèbre commutative* [AC] chap. I à X.

[Bri-Mo] O. Brinon, F. Mokrane : *Surconvergence de la monodromie p-adique des familles universelles de variétés abéliennes ordinaires*, preprint 13 oct. 2010.

[C] R. Crew : *F-isocrystals and p-adic representations* in *Algebraic Geometry, Bowdoin 1985*, Proceedings of Symposia in Pure Math., Vol. 46, AMS (1987), 111-138.

[Deℓ 1] P. Deligne : *La conjecture de Weil II*, Pub. Math. IHES 52, (1980), 137-252.

[Deℓ 2] P. Deligne : *Cristaux ordinaires et coordonnées canoniques* in *Surfaces algébriques*, Lecture Notes in Math. 868, Springer (1981).

[Deℓ 3] P. Deligne : *Rapport sur la formule des traces* in *SGA 4 1/2, Cohomologie Etale*, Lecture Notes in Math. 569, Springer (1977), 76-109.

[Deℓ 4] P. Deligne : *Fonctions L modulo ℓ^n et modulo p* in *SGA 4 1/2, Cohomologie Etale*, Lecture Notes in Math. 569, Springer (1977), 110-128.

[Dw 1] B. Dwork : *On the rationality of the zeta function of an algebraic variety*, Amer. J. Math., vol 88, (1960), 631-648.

[Dw 2] B. Dwork : *p-adic Cycles*, Pub. Math. IHES n° 37 (1969), 27-115.

[Dw 3] B. Dwork : *On Hecke polynomials*, Invent. Math. 12, (1971), 249-256.

[Dw 4] B. Dwork : *Normalized period matrices I*, Annals of Math. 94, n° 2, (1971), 337-388.

[Dw 5] B. Dwork : *Normalized period matrices II*, Annals of Math. 98, n° 1 (1973), 1-57.

[Dw 6] B. Dwork : *Lectures on p-adic differential equations*, Springer Grundlehren 253 (1982).

[Dw-S] B. Dwork, S. Sperber : *Logarithmic decay and overconvergence of the unit root and associated zeta functions*, Annales Scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t. 24, (1991), 575-604.

[EGA] A. Grothendieck, J. Dieudonné : *Eléments de Géométrie Algébrique* : Chap. I, Springer Grundlehren 166 ; Chap. II, III, IV, Pub. Math. IHES n° 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32.

[Eis] D. Eisenbud : *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math. 150, Springer, (1996).

[Eℓ] R. Elkik : *Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien*, Annales Scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t. 6, (1973), 553-604.

[Et 1] J.-Y. Etesse : *Rationalité et valeurs de fonctions L en cohomologie cristalline*, Annales Inst. Fourier, t. 38, fasc. 4, (1988), 33-92.

[Et 2] J.-Y. Etesse : *Relèvement de schémas abéliens, F-cristaux et fonctions L*, J. reine angew. Math. 535, (2001), 51-63.

[Et 3] J.-Y. Etesse : *Relèvement de schémas et algèbres de Monsky-Washnitzer : théorèmes d'équivalence et de pleine fidélité*, Rendiconti Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 107, (2002), 111-138.

[Et 4] J.-Y. Etesse : *Descente étale des F-isocristaux surconvergents et rationalité des fonctions L de schémas abéliens*, Annales Scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t. 35, (2002), 575-603.

[Et 5] J.-Y. Etesse : *Introduction to L- functions of F-isocrystals*, in *Geometric Aspects of Dwork Theory*, Vol. II, de Gruyter, (2002), 701-710.

[Et 6] J.-Y. Etesse : *Relèvement de schémas et algèbres de Monsky-Washnitzer : théorèmes d'équivalence et de pleine fidélité II*, Rendiconti Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 122, (2009), 205-234.

[Et 7] J.-Y. Etesse : *Images directes I : Espaces rigides analytiques et images directes*, hal-00425909/arXiv : 0910.4433.

[Et 8] J.-Y. Etesse : *Images directes II : F-isocristaux convergents*, hal-00425919/arXiv : 0910.4434.

[Et 9] J.-Y. Etesse : *Images directes III : F-isocristaux surconvergents*, hal-00425922/arXiv : 0910.4435.

[Et 10] J.-Y. Etesse : *Fonctions L en géométrie rigide II : F-(iso)cristaux et conjecture de Katz*, preprint.

[Et 11] J.-Y. Etesse : *Fonctions L en géométrie rigide III : Schémas abéliens ordinaires*, preprint.

[E-LS 1] J.-Y. Etesse, B. Le Stum : *Fonctions L associées aux F-isocristaux surconvergents I : Interprétation cohomologique*, Math. Annalen 296, (1993), 557-576.

[E-LS 2] J.-Y. Etesse, B. Le Stum : *Fonctions L associées aux F-isocristaux surconvergents II : Zéros et pôles unités*, Invent. Math. 127, (1997), 1-31.

[F-C] G. Faltings, C.-L. Chai : *Degeneration of Abelian Varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge, Band 22, Springer (1990).

[F-R] D. Ferrand, M. Raynaud : *Fibres formelles d'un anneau local noethérien*, Annales Scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t. 3, (1970), 295-311.

[G-K 1] E. Große-Klönne : *de Rham-Kohomologie in der rigiden Analysis*, Preprintreihe der Universität Münster SFB 478, Heft 39 (1999).

[G-K 2] E. Große-Klönne : *Rigid analytic spaces with overconvergent stucture sheaf*, Journal für die reine und angewandte Math. 519,(2000), 73-95.

[G 1] A. Grothendieck : *Fondements de la Géométrie Algébrique*, Extraits du Séminaire Bourbaki 1957-1962, Secrétariat Mathématique (1962).

[G 2] A. Grothendieck : *Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L*, Séminaire Bourbaki 279, dans *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Masson, North-Holland, (1968).

[Ig] J.-I. Igusa : *On the algebraic theory of elliptic modular functions*, J. Math. Soc. Japan 20 (1968), 96-106.

[K 1] N. Katz : *Travaux de Dwork*, Séminaire Bourbaki 409, Lecture Notes in Math. 383, Springer (1972).

[K 2] N. Katz : *Slope filtration of F-crystals*, Astérisque 63 (1979), 113-163.

[K 3] N. Katz : *Appendice à Cristaux ordinaires et coordonnées canoniques* in *Surfaces algébriques*, Lecture Notes in Math. 868, Springer (1981).

[K 4] N. Katz : *p-adic properties of modular schemes and modular forms* in *Modular Functions of One Variable III*, Lecture Notes in Math. 350, Springer (1973).

[Ked 1] K. Kedlaya : *Finiteness of rigid cohomology with coefficients*, Preprint, arxiv : math.AG/0208027. Duke Math. J. 134 (2006), 15-97.

[Ked 2] K. Kedlaya : *Semistable reduction for overconvergent F-isocrystals, I : Unipotence and logarithmic extensions*, Preprint, arxiv : math.NT/0405069 v3, 24 Jul 2005. Compositio Math. 143 (2007), 1164-1212.

[Ma] H. Matsumura : *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 8 (1997).

[Mi] J.-S. Milne : *Etale cohomology*, Princeton University Press (1980).

[Mo 1] P. Monsky : *p-Adic Analysis and Zeta Functions*, Kinokuniya Book-Store Co,Tokyo (1970).

[Mo 2] P. Monsky : *Formal Cohomolgy III*, Annals of Math. 93, n° 2 (1971), 315-343.

[M-W] P. Monsky, G. Washnitzer : *Formal Cohomolgy I*, Annals of Math. 88, n° 2 (1968), 181-217.

[vdP] M. van der Put : *The cohomology of Monsky and Washnitzer*, Bulletin de la SMF, mémoire n° 23, t. 114/fasc. 2 (1986), 33-60.

[R] M. Raynaud : *Anneaux locaux henséliens*, Lecture Notes in Math. 169, Springer (1970).

[Ro] A.M. Robert : *A Course in p-adic Analysis*, Graduate Texts in Mathematics 198, Springer (2000).

[S 1] J.-P. Serre : *Corps locaux*, Hermann (1968).

[S 2] J.-P. Serre : *Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques*, Pub. Math. IHES n° 12 (1962), p. 69-85.

[Sp] S. Sperber : *Congruence properties of the Hyperkloostermann sum*, Compositio Math. 40 (1980), 3-33.

[SGA 1] A. Grothendieck : *Revêtements étales et goupe fondamental*, Lecture Notes in Math. 224, Springer (1971).

[SGA 3] M. Demazure, A. Grothendieck : *Schémas en groupes*, Lecture Notes in Math. 151, 152, 153, Springer (1970).

[SGA 4] M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier : *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Math. 269, 270, 305, Springer (1972, 1973).

[SGA 7, II] P. Deligne, N. Katz : *Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique*, Lecture Notes in Math. 340, Springer (1973).

[Shi 1] A. Shiho : *Crystalline Fundamental Groups II- Log Convergent Cohomology and Rigid Cohomology*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 9 (2002), 1-163.

[Shi 2] A. Shiho : *Relative Log Convergent Cohomology and Relative Rigid Cohomology I*, arXiv : 0707.1742v1 [math.NT] 12 Jul 2007.

[Shi 3] A. Shiho : *Relative Log Convergent Cohomology and Relative Rigid Cohomology II*, arXiv : 0707.1743v1 [math.NT] 12 Jul 2007.

[W 1] D. Wan : *Meromorphic continuation of L-functions of p-adic representations*, Annals of Math. 143 (1996), 469-498.

[W 2] D. Wan : *Dwork's conjecture on unit-root zeta functions*, Annals of Math. 150 (1999), 867-927.

[W 3] D. Wan : *Higher rank case of Dwork's conjecture*, J. Amer. Math. Soc. 13 (2000), 807-852.

[W 4] D. Wan : *Rank one case of Dwork's conjecture*, J. Amer. Math. Soc. 13 (2000), 853-908.